Э. Л. АЙРАПЕТОВ, М. Д. ГЕНКИН

ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Государственный
научно-исследовательский институт
машиноведения

Э. Л. АЙРАПЕТОВ, М. Д. ГЕНКИН

ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1973

УДК 621.833.62-75

Айрапетов Э. Л., Генкин М. Д. **Деформативность планетарных механизмов**. «Наука», 1973, стр. 213.

В книге приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований деформативности элементов и соединений планетарных редукторов, включая зубья прямозубых и косозубых зубчатых колес, шлицов шлицевых муфт, ободьев зубчатых колес и шлицевых муфт, осей сателлитов, корпуса водила. Изложенный в монографии материал позволяет на стадии проектирования планетарных редукторов определять поле деформаций планетарных редукторов и конструктивные размеры их деталей в соответствии с основными эксплуатационными характеристиками.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-конструкторов, занимающихся проектированием, расчетом и исследованием планетарных механизмов.

Табл. 29, илл. 48, библ. 106 назв.

Гос. публичная
научно-техническая
библиотека
СССР

73-33608

Д4
10326

А $\frac{3133-0253}{042(02)-73}$ 1028—73

ПРЕДИСЛОВИЕ

В авиации и судостроении находят широкое применение планетарные редукторные системы, в которых выравнивание статической нагрузки по параллельным потокам мощности (между сателлитами) достигается, с одной стороны, повышением податливости элементов (таких, как эпицикл, система блокирующих и соединительных муфт), а с другой стороны, исключением опор у центральных колес (эпицикл, солнечная шестерня). Такая «плавающая подвеска» центральных колес совместно с упругой деформацией податливых элементов позволяет частично компенсировать неизбежные погрешности изготовления и монтажа зубчатых колес в планетарном механизме.

В реальных конструкциях трудно обеспечить идеальное пространственное шарнирное соединение центральных колес, поэтому в планетарных механизмах плавающая подвеска обеспечивается включением шлицевых (зубчатых) соединений. В последних при плавании центральных колес возникают внутренние восстанавливающие упругие силы и силы трения, которые оказывают значительное влияние на статику и динамику планетарного механизма.

В настоящее время нет еще достаточно полно разработанной теории планетарных механизмов с плавающей подвеской центральных колес и податливыми элементами, поэтому вопрос выбора рациональной (с точки зрения выравнивания статической нагрузки по параллельным потокам мощности) конструкции механизма решается исключительно экспериментальным путем. Опыт показывает, что эксплуатационные характеристики планетарных редукторных систем рассматриваемого типа в значительной мере зависят от компенсации погрешностей изготовления и монтажа зубчатых колес и связанного с процессом плавания центральных колес и упругим деформированием податливых элементов редукторных систем.

Разработка комплекса конструктивных и технологических мероприятий, направленных на улучшение эксплуатационных (жесткостных, прочностных, виброакустических) характеристик планетарных редукторных систем с плавающими центральными колесами, вызывает необходимость тщательного исследования механизма плавания центральных колес с учетом взаимодействия кинетических пар и упругого деформирования элементов и соединений редуктора.

Поскольку эксплуатационные характеристики планетарных редукторных систем зависят от совместного влияния погрешностей

изготовления и монтажа зубчатых колес и других элементов планетарного механизма, упругих деформаций податливых его элементов, то исследование плавания центральных колес невозможно проводить без рассмотрения точностной и жесткостной сторон этой проблемы.

Настоящая работа посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию деформативности основных элементов и соединений планетарных механизмов. В книге также освещены результаты работ, выполненных по рассматриваемой проблеме другими исследователями.

Во введении сформулированы основные задачи строительной механики планетарных механизмов и рассмотрены основные типовые схемы современных планетарных механизмов, особенности их работы в условиях высокой податливости элементов и соединений.

В первом разделе книги освещены вопросы, касающиеся деформации зубьев и шлицов зубчатых механизмов. В главе 1 определены составляющие суммарной деформации зубьев прямозубых зубчатых колес, приведено сопоставление расчетных величин деформации прямых зубьев с их экспериментальными значениями.

Определенная кривая податливости прямого зуба в функции от положения контактной точки на профиле зуба, кроме того, является вспомогательной величиной, необходимой для нахождения упругой деформации зуба косозубого зубчатого колеса.

В главе 2 на базе упрощенной модели упругого основания предложен метод определения упругой деформации зуба косозубого зубчатого колеса.

В главе 3 получены зависимости для определения деформации шлицов, причем рассмотрены случаи отсутствия и наличия перекосов между осями сопрягаемых шлицевых муфт, поскольку это вызывает необходимость составления разных расчетных схем шлицов. В этой же главе рассмотрена особенность, присущая только планетарным механизмам с высокой податливостью звеньев (в частности, ободьев шлицевых муфт), заключающаяся в периодическом изменении крутильной жесткости шлицевого соединения при ограниченной точности изготовления шлицевых венцов по окружным шагам.

Второй раздел книги (главы 4—6) посвящен исследованию деформативности ободьев зубчатых колес и шлицевых муфт планетарных механизмов. В главе 4 выполнен расчет деформированного состояния центральных зубчатых колес (солнечная шестерня и эпицикл). Применение метода элементарной нагрузки позволило решить задачу о деформации ободьев зубчатых колес при произвольной самоуравновешенной системе сил, приложенных к ним, что особо важно для учета влияния неравномерности распределения нагрузки между сателлитами на деформацию ободьев центральных колес планетарных механизмов.

На основании выполненного расчета деформации ободьев зубчатых колес определена дополнительная деформация в зубчатых зацеплениях центральных колес с сателлитами, обусловленная податливостью ободьев центральных колес.

Обнаружена характерная особенность зубчатых колес кольцевой формы, заключающаяся в том, что дополнительная деформация зубчатого зацепления, обусловленная податливостью ободьев таких зубчатых колес, не остается постоянной во времени, а периодически изменяется по фазе зацепления. Ажурная тонкостенная форма ободьев центральных колес планетарных механизмов приводит к тому, что на их деформацию значительное влияние оказывает зубчатый венец, поэтому в главе 6 рассмотрен вопрос о влиянии зубьев на жесткость обода зубчатого колеса.

В главе 5 метод элементарной нагрузки применен для определения деформации обода сателлита планетарного редуктора. Для расчета статических напряжений и деформаций в ободе сателлита вполне допустимо ограничиться рассмотрением симметричной деформации обода сателлита, поскольку в статических условиях происходит перераспределение и выравнивание нагрузки в зацеплениях сателлита с обоими центральными колесами.

В динамических условиях такого перераспределения нагрузки между обоими зацеплениями не происходит, поэтому в главе 5 рассмотрен также более общий случай несимметричной деформации обода сателлита. Здесь получены зависимости для определения дополнительной деформации в зубчатых зацеплениях, обусловленной податливостью обода сателлита.

В главе 6 рассмотрены вопросы исследования деформативности ободьев шлицевых (зубчатых) муфт — одного из основных элементов уравнительных механизмов планетарных редукторов. Предложенная расчетная модель ободьев шлицевых (зубчатых) муфт позволяет раздельно рассмотреть периодическую деформацию шлицевого (зубчатого) венца и осесимметричную деформацию обода муфты, что значительно упрощает метод определения напряженного и деформированного состояний ободьев шлицевых (зубчатых) муфт. Экспериментальная проверка метода показала его удовлетворительную применимость в расчетной инженерной практике. Приведены сведения о взаимной деформации элементов уравнительных механизмов планетарных редукторов при наличии зазоров и проскальзывания между шлицами (зубьями).

В третьем разделе книги (главы 7 и 8) рассмотрены вопросы деформативности сателлитного узла планетарных механизмов. В главе 7 определены составляющие суммарной деформации оси сателлита, выполнено сопоставление расчетных зависимостей с результатами экспериментов на осях сателлитов и других подобных деталях. Установлено, что деформация осей сателлитов оказывает существенное влияние на деформирование планетарных механизмов и в некоторых случаях превосходит деформацию зубчатых зацеплений.

Глава 8 посвящена определению деформации водила планетарного механизма. Из опыта эксплуатации планетарных механизмов известны случаи, когда упругая деформация водила вызывала перекос осей сателлитов и концентрацию нагрузки по длине зубьев в зубчатых зацеплениях. Поэтому наряду с обзором работ, посвященных рассматриваемой проблеме, предложен инженерный метод определения относительного смещения щек водила, обусловленного деформацией сдвига его перемычек. Экспериментальная проверка предложенного метода расчета относительного смещения щек водила показала допустимость его применения в инженерной практике.

ВВЕДЕНИЕ

Основное преимущество планетарных редукторов заключается в разделении потока мощности по параллельным ветвям, что значительно снижает усилия, передаваемые зубчатыми зацеплениями, при заданном крутящем моменте. Прочность ободьев центральных колес при этом также оказывается обеспеченной, так как нагрузка к ним подводится в нескольких сечениях (по числу сателлитов в механизме), что значительно снижает уровень напряжений, возникающих в ободьях центральных колес. Таким образом, использование планетарных редукторов позволяет повышать нагрузки, передаваемые агрегатом, с одновременным снижением их габаритов.

Однако при проектировании, изготовлении и эксплуатации планетарных редукторов возникает сложная проблема — выравнивание нагрузки по параллельным потокам, поскольку неравномерность распределения нагрузки значительно снижает эффект, получаемый при использовании планетарных редукторов. Неизбежные погрешности изготовления и монтажа элементов планетарных механизмов и в первую очередь погрешности расположения в водиле расточек под оси сателлитов приводят к разнозазорности в зацеплениях сателлитов с центральными колесами, являющейся причиной неравномерного нагружения сателлитов. При значительных погрешностях изготовления элементов планетарных механизмов и малых величинах упругих деформаций в зацеплениях сателлитов с центральными колесами это может привести к столь значительной перегрузке одного или нескольких сателлитов, что она вызовет разрушение зубьев и ободьев зубчатых колес и выход из строя всего агрегата.

Практика проектирования и эксплуатации планетарных редукторов позволила разработать ряд мер, направленных на выравнивание нагрузки по параллельным потокам мощности. Прежде всего нашли применение специальные уравнительные механизмы, основанные на принципе равновесия центрального элемента этого механизма [58, 59, 61, 68].

В последние годы значительное распространение нашла конструкция планетарных механизмов с так называемой плавающей подвеской звеньев, обеспечивающей компенсацию погрешностей изготовления и монтажа зубчатых колес [1, 47, 89, 101]. Идея конструкции Штокихта [101] заключается в том, что одно или несколько звеньев планетарного механизма (центральные колеса, сателлиты или водило) устанавливаются без опор, что позволяет им компенсировать неизбежные погрешности

изготовления и монтажа зубчатых колес свободным смещением в радиальном направлении.

Другое направление в решении проблемы выравнивания нагрузки между сателлитами заключается в увеличении податливости элементов планетарного механизма: ободьев одного или обоих центральных колес, опор сателлитов [1, 21, 39, 68] и т. д. При этом предполагается, что чем больше упругая деформация в зацеплениях сателлитов с центральными колесами, тем более равномерно будет распределена нагрузка между сателлитами при неизменных величинах погрешностей в зацеплениях.

На практике, как правило, в каждой конструкции встречается сочетание плавающих и податливых элементов планетарных передач. Например, в главных турбозубчатых агрегатах судов наибольшее распространение получили планетарные редукторы с двумя плавающими центральными колесами и податливым ободом венца с внутренними зубьями (эпицикл) [1, 47, 93, 100]. Плавание центральных колес обеспечивается обычно включением шлицевых соединений, допускающих, благодаря зазорам в шлицах, свободу радиальных перемещений (плавание) эпицикла и солнечной шестерни.

Плавание центральных колес, так же как и упругое деформирование податливых элементов планетарного механизма, является производным процессом, сопутствующим процессу перераспределения статической нагрузки по параллельным потокам мощности. Поэтому для правильного понимания процесса плавания центральных колес и его проявления на статике и динамике планетарного механизма необходимо изучить механизм перераспределения нагрузки между сателлитами, обусловленный неизбежными погрешностями изготовления и монтажа зубчатых колес и упругим деформированием податливых элементов.

Таким образом, планетарный механизм с плавающей подвеской центральных колес и податливыми элементами представляет сложное, многократно статически неопределимое инженерное сооружение, характерной особенностью которого является силовое замыкание высших кинематических пар (зубчатых зацеплений) и свободное смещение центральных колес в пределах предусмотренных боковых зазоров в зубчатых зацеплениях и шлицевых уравнителях. В некоторых случаях предъявляются повышенные требования к прочности и надежности планетарных механизмов, поскольку срок службы всего агрегата зависит от долговечности элементов и соединений планетарного механизма.

Сложность и взаимосвязанность процессов, происходящих в планетарных механизмах с плавающей подвеской центральных колес и податливыми элементами, обосновывают целесообразность выделения из общей теории планетарных механизмов проблем, касающихся обеспечения проектируемому планетарному механизму необходимых прочности и жесткости, т. е. строительной механики планетарных механизмов.

Выделение строительной механики планетарных механизмов в самостоятельный раздел общей теории планетарных механизмов необходимо, поскольку позволит на стадии проектирования планетарных механизмов выбирать компромиссное конструктивное решение с учетом требований, подчас противоречивых, предъявляемых к механизму. При этом статический и динамический расчеты планетарных механизмов будет возможно выполнять едиными методами, разработанными в строительной механике упругих систем. Выделение строительной механики планетарных механизмов в самостоятельный раздел достаточно подготовлено работами большого числа инженеров и ученых, изучавших различные аспекты проблемы прочности (в широком смысле слова) планетарных механизмов.

В общей теории планетарных механизмов наиболее полно изучены их геометрия, кинематика, к.п.д. [24, 47], в меньшей мере изучена статика планетарных механизмов и совершенно недостаточно рассмотрены вопросы динамики планетарных механизмов. Это объясняется тем, что планетарный механизм с точки зрения строительной механики является многократно статически неопределимой системой, и для нахождения усилий, действующих в кинематических парах, требуется знание как деформативности, так и качества изготовления и монтажа элементов механизма. Появление планетарных механизмов с плавающей подвеской центральных колес и податливыми элементами более остро ставит вопрос о разработке строительной механики планетарных механизмов. В авиастроении, судостроении и других отраслях промышленности в тех случаях, когда к элементу или ко всему сооружению предъявляются повышенные требования по прочности, создаются и развиваются самостоятельно разделы науки, посвященные этой проблеме; так, существуют строительная механика оболочек [38], самолета [69], подводной лодки [83], корабля [53].

Строительная механика планетарных механизмов рассматривает три частные проблемы:

1) проблема внешних сил — определение усилий, которые могут действовать на планетарный механизм при эксплуатации агрегата, включающего планетарный механизм;

2) проблема внутренних сил — определение сил, действующих на элементы и соединения планетарного механизма, а также напряжений и деформаций, возникающих в них при действии на планетарный механизм заданных внешних сил;

3) проблема допускаемых напряжений — определение напряжений и деформаций, возникающих в элементах и соединениях планетарного механизма, которые могут быть допущены без вреда для прочности и жесткости как различных элементов, так и всего планетарного механизма в целом.

Сформулированные проблемы являются общими для строительной механики любого инженерного сооружения [53]. В строительной механике планетарных механизмов с плавающей подвеской

центральных колес и податливыми элементами целесообразно выделить частную проблему — проблему наименьшей виброактивности планетарного механизма (минимума интенсивности возмущающих сил). Это связано с тем, что при плавающей подвеске центральных колес делается более богатым спектр возмущающих сил в планетарном механизме с одновременным возрастанием интенсивности последних. Поэтому необходимо назначать такой тип подвески центральных колес, при котором будет достигнуто максимальное выравнивание статической нагрузки по параллельным потокам мощности при минимальной амплитуде плавания центральных колес.

Проблема внешних сил строительной механики планетарных механизмов существенно зависит от типа агрегата, на котором установлен планетарный механизм. Поэтому она должна решаться индивидуально для каждого агрегата с учетом режимов его работы в эксплуатационных условиях.

Проблема допускаемых напряжений строительной механики планетарных механизмов может быть рассмотрена только при условии изученности закономерности внешних сил, действующих на планетарный механизм, а также если известен уровень и частотный состав внутренних сил, действующих на элементы и соединения планетарного механизма. Поэтому ею целесообразно заниматься после изучения законов действия внешних и внутренних сил в планетарных механизмах.

Проблема наименьшей виброактивности планетарных механизмов может быть решена после решения проблемы внутренних сил. Поэтому к ней целесообразно подойти в процессе изучения одного из разделов проблемы внутренних сил строительной механики — динамики планетарных механизмов.

Таким образом, основной проблемой строительной механики планетарных механизмов является проблема внутренних сил. Поскольку планетарный механизм является многократно статически неопределимой системой, то для определения внутренних сил, действующих на элементы и соединения механизма, необходимо изучить жесткость и точность планетарного механизма. Проблема внутренних сил строительной механики планетарных механизмов включает следующие разделы: 1) деформативность планетарных механизмов; 2) точность планетарных механизмов; 3) статика планетарных механизмов; 4) динамика планетарных механизмов.

Решение задач строительной механики планетарных механизмов должно проводиться с учетом характерных особенностей типовых схем планетарных редукторных систем. Поэтому представляет интерес рассмотрение исследуемых ниже планетарных механизмов.

На рис. 1 и 2 приведены типовые схемы шевронных планетарных редукторов с двумя плавающими центральными колесами. Характерной особенностью приведенных схем редукторов является конструкция эпицикла, который разделен на две независимые

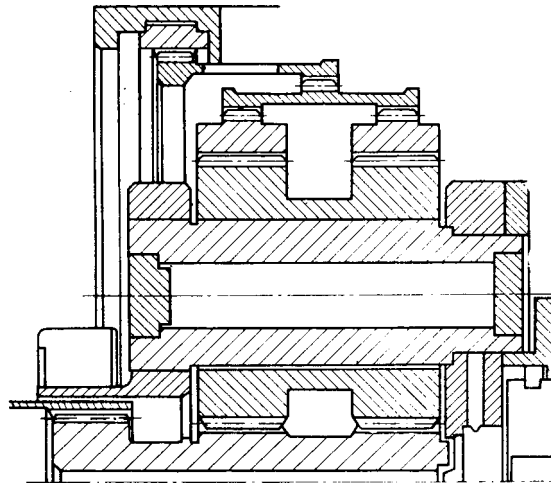


Рис. 1. Схема одноступенчатого планетарного редуктора с двумя плавающими центральными колесами

друг от друга части, представляющие два косозубых колеса с правой и левой спиралью. Вследствие этого распределение сил между сателлитами каждого полушеврона происходит независимо друг от друга. Оба полушеврона эпицикла объединены в одно шевронное колесо блокирующей зубчатой (шлицевой) муфтой. Плавающая конструкция центральных колес обеспечивается включением двойных зубчатых муфт. Для более полного выравнивания нагрузки по сателлитам обод плавающего эпицикла выполнен достаточно податливым, деформируемым под действием усилий в зацеплениях с сателлитами.

Приведенные конструкции редукторов типичны в том смысле, что компенсация ошибок изготовления и монтажа зубчатых колес достигается двумя параллельными методами: свободой радиальных перемещений плавающих звеньев, включением зубчатых (шлицевых) муфт и упругой деформацией обода эпицикла.

Устройство, способствующее выравниванию нагрузки по сателлитам планетарного редуктора, называется уравнительным механизмом. В планетарных редукторах с плавающей подвеской центральных колес обычно уравнительным механизмом называется

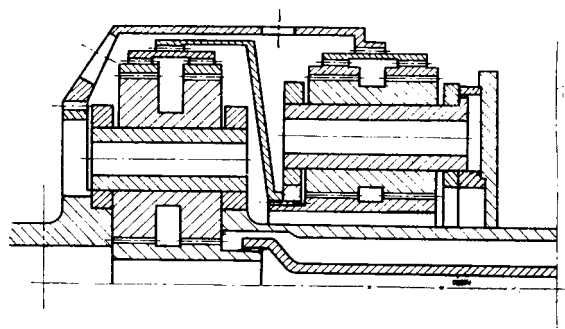


Рис. 2. Схема двухступенчатого планетарного редуктора с двумя плавающими центральными колесами

собственно шлицевая подвеска центрального колеса [68]. По-видимому, к уравнительному механизму следует кроме шлицевой подвески отнести также эпицикл, блокирующую и соединительную муфты, поскольку конструкция этих элементов (их податливость) оказывает существенное влияние на распределение нагрузки по сателлитам [2].

Уточнение понятия уравнительного механизма планетарного редуктора имеет принципиальное значение, так как акцентирует внимание на взаимосвязи всех его элементов. Например, анализ работы шлицевой подвески в отрыве от остальных элементов уравнительного механизма может привести к неверным выводам. Так, обнаруженные в некоторых случаях при испытании планетарных редукторов неполадки в работе шлицевых соединений уравнительных механизмов объясняются именно тем, что при их проектировании не принималось во внимание влияние других элементов на работу шлицевой подвески.

Высокая податливость элементов уравнительных механизмов способствует более равномерному распределению нагрузки по сателлитам, так как плавание центральных колес происходит не только благодаря зазорам в шлицевых подвесках, но и в результате упругого деформирования элементов уравнительных механизмов. Однако эти деформации оказывают отрицательное влияние на работу шлицевых соединений, приводя к перекосам в шлицах. Работа шлицевых соединений в условиях перекосов (упругих или технологических) сопровождается концентрацией нагрузки на шлицах, что приводит к преждевременным контактным разрушениям поверхностей шлицов и поэтому снижает свободу «плавания» центральных колес.

Деформативность планетарных редукторов проявляется на их виброакустических характеристиках в двух направлениях. Во-первых, податливость элементов и соединений планетарных механизмов определяет спектр собственных частот колебаний агрегата. Если, например, прежде при составлении расчетных динамических систем переборных зубчатых механизмов ограничивались учетом только жесткости валов и в некоторых случаях жесткости зубьев зубчатых колес, то при виброакустических расчетах планетарных механизмов, включающих большое число деталей в форме податливых колец, оболочек, дисков и др., приходится также учитывать жесткость других элементов и соединений планетарных редукторных систем.

Во-вторых, уровень возмущающих сил в зубчатых механизмах в значительной степени зависит от точности зубчатых зацеплений, определяемой как технологической точностью деталей, так и упругими деформациями в зацеплениях. Поскольку упругие деформации в некоторых случаях превосходят технологические погрешности, то исследование деформативности планетарных механизмов позволит бороться с источниками возбуждения наиболее интенсивных колебаний непосредственно в самом редукторе.

I ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ЗУБЬЕВ И ШЛИЦОВ

Глава 1. ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМЫХ ЗУБЬЕВ

В ряде планетарных механизмов преобладающее применение находят прямозубые зубчатые передачи, поэтому представляется целесообразным рассмотреть вопрос об упругой деформации зубьев прямозубых зубчатых колес. Кроме того, полученные для прямых зубьев результаты могут быть использованы как вспомогательный материал для определения деформации зубьев косозубых зубчатых колес.

При исследовании деформации зубчатого зацепления удобно ввести в рассмотрение податливость зубчатого зацепления, под которой понимается дополнительное перемещение точки контакта зубьев, измеренное вдоль линии зацепления w_Σ и обусловленное упругими деформациями зубьев и ободьев зубчатых колес, отнесенное к удельной нагрузке в зацеплении $p_{уд}$, вызвавшей это перемещение,

$$\delta_\Sigma = w_\Sigma / p_{уд}.$$

Из известного свойства эвольвенты следует, что упругая деформация w_Σ по линии зацепления вызовет относительный поворот зубчатых колес на угол

$$\varphi = w_\Sigma / R_0,$$

где R_0 — радиус основной окружности зубчатого колеса.

Точное решение задачи о деформации зубчатого зацепления с учетом взаимного влияния зуба и обода зубчатого колеса представляет значительные трудности, что вызывает необходимость поиска приближенных методов решения этой задачи. В работах, посвященных исследованию упругих деформаций в зубчатых зацеплениях, обычно суммарная деформация зубчатого зацепления упрощенно принимается равной сумме двух слагаемых: деформации зубьев и деформации ободьев зубчатых колес. Деформацию зубьев будем считать состоящей из изгибной и контактной составляющих, а деформацию обода зубчатого колеса — из деформации прилежащей к зубу части обода (так называемая осадка основания зуба) и деформации нейтральной оси обода зубчатого колеса. В соответствии с определением податливости зубчатого за-

цепления все составляющие упругого перемещения точки контакта на зубе должны быть спроектированы на линию зацепления.

С учетом сказанного выше суммарная деформация зубчатого зацепления равна

$$w_{\Sigma} = \sum_{i}^{2} (w_{и_i} + w_{ос_i} + w_{об_i}) + w_{к},$$

где $w_{и_i}$ — изгибная деформация i-го зубчатого колеса, $w_{ос_i}$ — «осадка» основания зуба i-го зубчатого колеса, $w_{об_i}$ — деформация обода i-го зубчатого колеса, $w_{к}$ — контактная деформация пары зубьев.

§ 1. Изгибная деформация зубьев

В первых работах, посвященных приближенному определению деформации зубьев зубчатых колес, предполагалось, что основной составляющей является изгибная деформация зубьев.

При этом изгибная деформация зуба определялась элементарными методами сопротивления материалов как консольной балки, имеющей жесткую заделку в обод зубчатого колеса [64, 95]. Даже в последних зарубежных работах изгибная деформация зубьев определяется как для консольных балок с жесткой заделкой методами сопротивления материалов [86, 92].

Чем короче балка, тем больше погрешность при применении формул, полученных для консоли, длина которой предполагается значительно больше ее поперечного размера. Поэтому, поскольку поперечные размеры зубьев зубчатых колес не позволяют рассматривать их в виде призматических балок, полученные таким путем расчетные формулы для упругой деформации зубьев зубчатых колес давали значительное расхождение с результатами экспериментов.

Для определения изгибной деформации прямого зуба заменим эвольвенты, очерчивающие профили зуба, прямыми линиями, проходящими через кромки вершин зуба e и точки начала переходных кривых i. В результате получим бесконечный клин, перемещение точек которого будем принимать за изгибную деформацию зуба. Решение задачи теории упругости о клине при произвольном расположении сосредоточенных сил на его гранях представляет значительные математические трудности. Поэтому сведем нашу задачу к известной в теории упругости задаче о бесконечном клине с системой сосредоточенных сил, приложенных в его вершине.

Заменяем заданную силу, приложенную в произвольной точке грани клина $к$, эквивалентной системой сил — сосредоточенной силой P_n и изгибающим моментом M, равным произведению этой силы на расстояние от линии ее действия до вершины клина.

При определении изгибной деформации зуба-клина можно пользоваться приближенной зависимостью [7].

$$w_{\text{и.кл.}} = \Delta v$$

или

$$w_{\text{и.кл.}} = \frac{2}{E} P_n (k_1 + k_2 + k_3), \tag{1.1}$$

где

$$k_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \left[\ln \frac{r_i}{r_k} - \frac{r_i - r_k}{r_{\text{вп}} - r_i} \ln \frac{r_{\text{вп}}}{r_i} \right],$$

$$k_2 = \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left[\ln \frac{r_i}{r_k} - \frac{r_i - r_k}{r_{\text{вп}} - r_i} \ln \frac{r_{\text{вп}}}{r_i} \right], \tag{1.2}$$

$$k_3 = -\frac{1}{\operatorname{inv} 2\alpha} \left(1 - \frac{r_k}{r_i}\right)\left(1 - \frac{r_k}{r_{\text{вп}}}\right).$$

Поскольку $r_{\text{вп}}/r_i$ мало отличается от единицы, то, раскладывая выражение $\ln r_{\text{вп}}/r_i$ в ряд и сохраняя два первых члена разложения, придадим формулам (2) следующий вид:

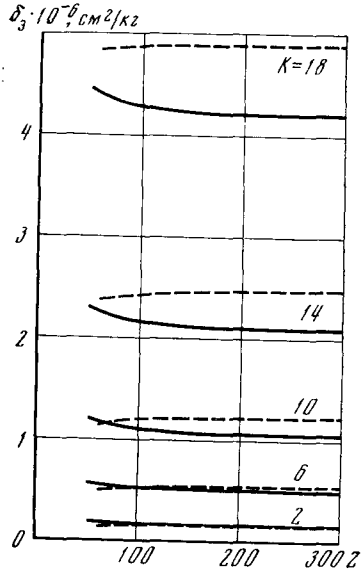
$$k_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \left\{ \ln \frac{r_i}{r_k} - \left(1 - \frac{r_k}{r_i}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\text{вп}}}{r_i} - 1\right)\right]\right\}, \tag{1.3}$$

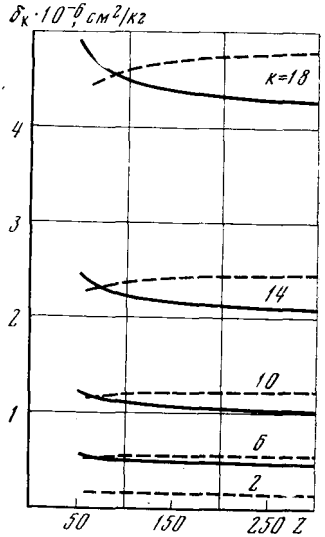
$$k_2 = \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left\{ \ln \frac{r_i}{r_k} - \left(1 - \frac{r_k}{r_i}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\text{вп}}}{r_i} - 1\right)\right]\right\},$$

$$k_3 = -\frac{1}{\operatorname{inv} 2\alpha} \left(1 - \frac{r_k}{r_i}\right)\left(1 - \frac{r_k}{r_{\text{вп}}}\right).$$

Из структуры коэффициентов k_i видно, что первый из них характеризует влияние перерезывающей силы $-P_n \sin \gamma$, второй — влияние сжимающей силы $P_n \cos \gamma$, третий — влияние изгибающего момента $P_n r_k \sin (\alpha + \gamma)$. Расчеты показывают, что сжимающая сила очень мало влияет на изгибную деформацию зуба-клина, поэтому в формуле (1) можно положить $k_2 = 0$. Таким образом, формула (1) позволяет определять изгибную деформацию зуба-клина относительно его основания.

Для определения изгибной деформации эвольвентного зуба необходимо учесть влияние на нее отклонения действительного профиля зуба от принятой выше трапецеидальной формы зуба-клина. Учет эвольвентной формы профиля зуба методом теории упругости представляет значительные математические трудности, поэтому поступим следующим образом. Оценим влияние кривизны профиля зуба методом сопротивления материалов. Тогда вопрос об учете действительной формы зуба можно решить более простым





Р и с. 3. Зависимость изгибной податливости эвольвентного зуба $\delta_э = w_э/p_n$ от числа зубьев зубчатого колеса z (наружный зуб); — — — внутренний зуб

Р и с. 4. Зависимость изгибной податливости зуба-клина $\delta_{кл} = w_{кл}/p_n$ от числа зубьев зубчатого колеса z

— наружный зуб; — — — внутренний зуб

методом сопротивления материалов и, следуя за [77], записать

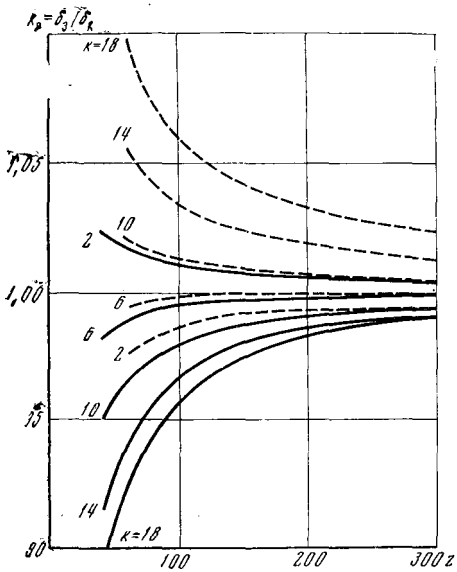
$$w_и = w_{и.кл} \frac{w_э}{w_{кл}} = k_э w_{и.кл}, \tag{1.4}$$

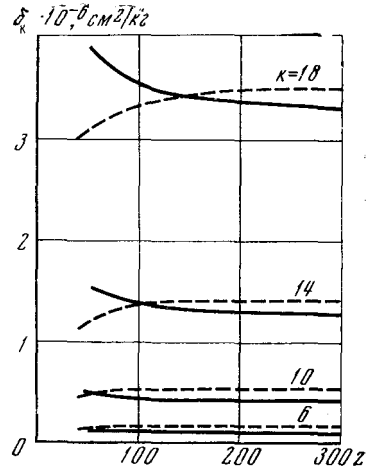
где $w_и$ — изгибная деформация эвольвентного зуба, $w_{и.кл}$ — изгибная деформация зуба-клина (1), $w_э$ — изгибная деформация эвольвентного зуба, определенная методом сопротивления материалов, $w_{кл}$ — изгибная деформация зуба-клина, определенная методом сопротивления материалов, $k_э$ — коэффициент, учитывающий действительную форму эвольвентного зуба.

В этом случае для определения коэффициента $k_э = w_э/w_{кл}$, характеризующего влияние кривизны профиля зуба на его изгибную деформацию, необходимо решить две задачи об изгибе консольной балки, боковые стороны которой очерчены а) по эвольвенте и б) по прямой линии.

Для определения величин $w_э$ и $w_{кл}$ была составлена программа применительно к ЭВМ «М-3»[1]. Интегралы I_I и I_{II} определялись

[1] Составление программы и расчет на ЭВМ «М-3» выполнены инж. В. М. Бетезату.





Р и с. 5. Зависимость коэффициента кривизны $k_э$ от числа зубьев зубчатого колеса z

— наружный зуб; — — — внутренний зуб

Р и с. 6. Зависимость изгибной податливости зуба-клина $\delta_{икл} = w_{икл}/p_n$ от числа зубьев зубчатого колеса z

— наружный зуб; — — — внутренний зуб

численным интегрированием по формуле Симпсона. Программа была составлена таким образом, что представилась возможность определить изгибную деформацию зубьев наружного и внутреннего зацепления. При определении изгибной деформации зуба-клина $w_{кл}$ прямая, заменяющая эвольвентный профиль зуба, пересекала его на расстоянии $\pm m$ от делительной окружности (m — модуль зацепления).

Профиль зуба был разбит на 18 участков. Индекс 0 относится к точке профиля зуба, лежащей на окружности впадин (на защемленном торце), а индекс 18 — к точке, лежащей на окружности выступов зубчатого колеса. Независимо от профиля зуба-балки (эвольвентный или прямолинейный) принималось, что направление действия силы P_n в точке k образует один и тот же угол γ_k с осью симметрии зуба.

Расчет был проведен для стального зуба ($E = 2{,}15 \cdot 10^6$ *кГ/см*², $\nu = 0{,}3$), имеющего стандартную высоту 2,25 m. Предполагалось, что точка k приложения силы P_n совпадает последовательно с точками от *2* до *18*. Расстояние между соседними точками приложения силы P_n равнялось 0,125 m.

Результаты расчета величин $w_э$ и w_k даны на рис. 3 и 4, величины коэффициента $k_э$ — на рис. 5.

Характерные точки, для которых на графиках приведены величины $\delta_э$, δ_k, $k_э$, расположены на профиле зуба следующим образом: точка *2* — на ножке зуба на расстоянии m от делительной окружности, точка *6* — на ножке зуба на расстоянии 0,5 m от делительной окружности, точка *10* — на делительной окружности, точка *14* — на головке зуба на расстоянии 0,5 m от делительной окружности, точка *18* лежит на вершине зуба.

Величины $\delta_э$, $\delta_{кл}$ или $k_э$ для меньшего числа зубьев зубчатого колеса можно найти из приведенных графиков экстраполяцией.

На рис. 6 приведены результаты расчета изгибной податливости зуба-клина методом теории упругости по формулам (1) и (3). Характер изменения изгибной деформации в зависимости от числа зубьев зубчатого колеса остается таким же, как и при расчете деформации методом сопротивления материалов (рис. 4). Из сопоставления двух методов видно, что метод теории упругости дает заниженные деформации. С приближением точки приложения нагрузки к основанию зуба и с ростом числа зубьев изгибная деформация зуба-клина изменяется быстрее, чем это следует по методу сопротивления материалов.

§ 2. Деформация прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса

Исследование упругой заделки зуба в обод зубчатого колеса впервые выполнено в работе [76] и опубликовано в статье [74], где определены упругие перемещения края упругой полуплоскости, заменяющей обод зубчатого колеса, под действием напряжений, распределенных по основанию зуба. Полученные выражения настолько сложны, что значительно затрудняет их практическое применение. Кроме того, кинематические граничные условия, наложенные на упругую полуплоскость, выбраны такими, что полученные результаты могут быть использованы только для зубчатых колес дисковой формы с жесткой ступицей. Вызывает также сомнение полученный автором результат о зависимости деформации прилежащей к зубу части обода от модуля зацепления. Поэтому ниже приведен метод определения упругой деформации прилежащей к зубу части обода, основанный на использовании решений контактной задачи теории упругости с уточненными кинематическими условиями.

В работах [86, 92] деформация прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса определена в предположении, что воздействие зуба на обод может быть заменено не системой напряжений, действующих на участке сопряжения зуба и обода, а среднеинтегральными величинами — сосредоточенными силами и изгибающим моментом. Полученные приближенные зависимости имеют доста-

точно простой вид, однако при выводе их отсутствовала необходимая строгость постановки задачи.

Рассматриваем прилежащую к зубу часть обода зубчатого колеса в виде упругой полуплоскости, на участке которой $(-a, a)$, равном ширине основания отброшенного зуба, действуют распределенные некоторым образом нормальная $p(x)$ и касательная $q(x)$ нагрузки. Таким образом, действие зуба на прилежащую к нему часть обода зубчатого колеса заменяется системой распределенных нагрузок $p(x)$ и $q(x)$, а сам зуб отбрасывается.

В работе [74] кинематические граничные условия, наложенные на упругую полуплоскость, были выбраны таким образом, что некоторый элемент, параллельный прямолинейному краю полуплоскости, расположенный на некотором расстоянии h от него, был неподвижен, т. е.

$$(u)_{\substack{x=0\\y=h}} = 0, \qquad (v)_{\substack{x=0\\y=h}} = 0, \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{\substack{x=0\\y=h}} = 0.$$

Характер назначения кинематических граничных условий, когда некоторые связи накладываются на точки, не лежащие на краю полуплоскости, вызывает возражение, так как в данном случае исследуется деформированное состояние зоны, близлежащей к участку $[-a, a]$, на котором действуют внешние силы. Поэтому априорное назначение неподвижных точек в этой зоне упругой полуплоскости может привести к ошибочным результатам при определении перемещений точек, лежащих на ее прямолинейной границе.

Известно, что перемещения границы полуплоскости могут быть определены только с точностью до некоторой постоянной, поэтому будем считать, что полуплоскость закреплена на границе в некоторой, достаточно удаленной от зоны $[-a, a]$ точке, с координатой $x' = l'$. Тогда задача сводится к полуплоскости, закрепленной на границе в точке $x = l$ и нагруженной на участке $[-a, a]$ распределенными некоторым образом нормальной $p(x)$ и касательной $q(x)$ нагрузками.

Как показано в работе [7], выражения для перемещений, осредненных на участке сопряжения зуба с ободом зубчатого колеса, примут вид

$$\bar{v} = -L(l)\frac{\vartheta}{2} \cdot P_n \sin\alpha, \tag{2.1}$$

$$\bar{u} = L(l)\frac{\vartheta}{2} \cdot P_n \cos\alpha, \tag{2.2}$$

$$\bar{\gamma} = -3\frac{h}{a^2}\left(1 - \frac{x}{n}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{\vartheta}{2} \cdot P_n \cos\alpha, \tag{2.3}$$

где $L(l)$ — функция, зависящая от координаты выбранной непод-

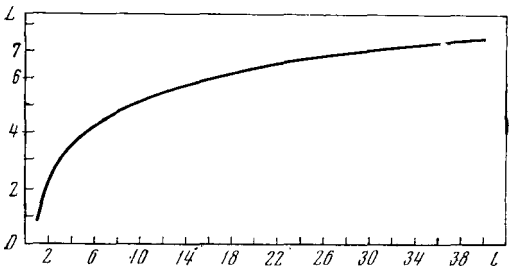
вижной на границе полуплоскости точки (рис. 7),

$$L(l) = (1 + l)\ln\left(\frac{1+l}{1-l}\right) + 2\ln\frac{\sqrt{l}}{2}(1 - l). \qquad (2.4)$$

Найденные средние величины упругой деформации прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса вызовут дополнительное перемещение точки приложения силы P_n вдоль линии зацепления, равное

$$w_{oc} = (\bar{v} + \bar{\gamma}h)\cos\alpha + \bar{u}\sin\alpha, \qquad (2.5)$$

где h — расстояние от точки приложения силы P_n на профиле зуба до заделки его в обод зубчатого колеса (рис. 8).



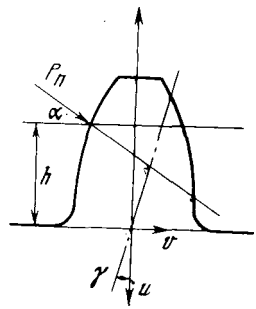


Рис. 7. Зависимость коэффициента $L(l)$ от координаты неподвижной точки l

Рис. 8. К определению перемещения точки приложения силы, обусловленного податливостью основания зуба

После подстановки в (2.5) усредненных перемещений основания зуба получим

$$w_{oc} = P_n\frac{\vartheta}{2}[L(l) + K(\alpha, x)], \qquad (2.6)$$

где $K(\alpha, x)$ — вспомогательный коэффициент, равный

$$K(\alpha, x) = 3\left(\frac{h}{a}\cos\alpha\right)^2\left(1 - \frac{x}{h}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Найденная величина дополнительного перемещения точки приложения силы P_n состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит только от силы P_n, упругих свойств материала и от выбранной точки закрепления упругой полуплоскости (т. е. конструктивного исполнения обода зубчатого колеса), но не зависит от геометрических размеров зуба и расположения точки контакта на его профиле. Это слагаемое характеризует действие сжимающей и перерезывающей сил, приложенных к зубу.

Второе слагаемое зависит от геометрических размеров зуба, расположения точки контакта на его профиле, но не зависит от

выбранной точки закрепления упругой полуплоскости. Это слагаемое характеризует действие изгибающего момента, создаваемого силами, приложенными к зубу относительно его основания.

Формула (2.6) включает постоянную $L(l)$, зависящую некоторым образом от расстояния точки на границе полуплоскости, перемещение которой принимается равным нулю, до оси симметрии зуба, деформация которого определяется. Поэтому эта формула может быть использована для определения деформации прилежащей к зубу части обода независимо от метода, принятого для нахождения неподвижной точки на границе полуплоскости, имеющей координату $x = l$. Переходим к определению координаты $x = l$ этой точки.

Из теории упругости известно, что для упругой полуплоскости неподвижные точки находятся в бесконечности, однако, полагая в полученных выше формулах $l = \infty$, убедимся, что перемещения станут равными логарифмической бесконечности.

Для определения координаты точки, перемещения которой равны (или могут быть приняты равными) нулю, поступим следующим образом. Если часть обода может быть представлена в виде модели, имеющей конечные размеры (зубчатые колеса дисковой формы), то из решения соответствующей задачи можно определить координаты неподвижной точки. Если упомянутая выше модель имеет бесконечные размеры (зубчатое колесо кольцевой формы), то неподвижная точка теоретически будет находиться в бесконечности. В этом случае за неподвижную следует принять точку, перемещение которой в n раз меньше средней величины перемещения прилежащей к зубу части обода на участке их сопряжения.

Условность в назначении неподвижных точек оправдана тем, что перемещения достаточно быстро затухают в некотором удалении от области $[-a, a]$, поэтому погрешность от произвола в выборе неподвижных точек будет незначительна.

При определении координаты неподвижной точки $x = l$ будем различать два вида конструктивного исполнения обода зубчатого колеса — обод выполнен в виде диска, и обод имеет кольцевую форму.

Как показано в работе [7], координата неподвижной точки для зубчатого колеса дисковой формы может быть определена по формуле

$$l \approx 0{,}73 \frac{R}{a}, \tag{2.7}$$

где R — радиус окружности впадин зубчатого колеса.

Для зубчатого колеса кольцевой формы координата точки, в которой перемещения в n раз меньше, чем в точке приложения нагрузки, может быть найдена из соотношения

$$1 + \left(\frac{l/H}{0{,}07}\right)^2 = n. \tag{2.8}$$

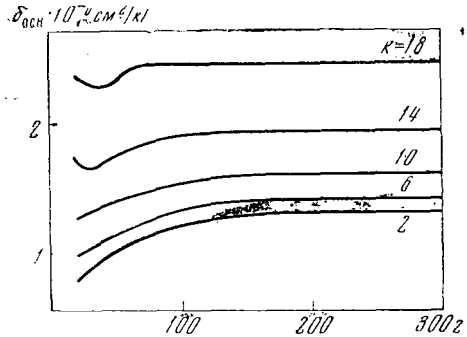


Рис. 9. Зависимость податливости прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса дисковой формы от числа зубьев

Полагая $n = 100$ из (8), найдем

$$l \approx 0{,}7 \cdot \frac{H_0}{a}, \tag{2.9}$$

где $H_0 = {}^1/_2 (R_1 - R_2)$ — толщина кольца, R_1, R_2 — внешний (внутренний) диаметр кольца.

Сравнивая формулы (2.7) и (2.9), убеждаемся, что независимо от конструктивного исполнения обода зубчатого колеса координата неподвижной точки l линейно зависит от толщины обода зубчатого колеса. Действительно, зубчатое колесо дисковой формы можно рассматривать как предельный случай обода колеса кольцевой формы с толщиной, равной радиусу диска. Относительная координата «неподвижной» точки в обоих случаях практически одинакова, поэтому для дальнейших расчетов примем бóльшую из них, определяемую по формуле (2.7). Абсолютная величина координаты «неподвижной» точки для зубчатого колеса кольцевой формы значительно меньше, чем для зубчатого колеса дисковой формы (обычно $H \ll R$).

Таким образом, полученные зависимости (2.7) и (2.9) могут быть использованы для определения координаты неподвижной точки l, входящей в формулу для вспомогательной функции $L(l)$.

Кроме того, этими формулами можно воспользоваться для нахождения координаты точки, местными перемещениями которой можно пренебречь. Необходимо повторить, что формулы (2.7) и (2.9) справедливы только для точек, в которых равны нулю (или бесконечно малы) нормальные перемещения. Очевидно, что найденные по этим формулам точки не будут удовлетворять требованию равенства нулю также и тангенциальных перемещений. Однако, учитывая то, что при достаточно больших величинах l функция $L(l)$ изменяется слабо, этим можно пренебречь и считать, что формулы (2.7) и (2.9) определяют координаты точки, в которой отсутствуют как нормальные, так и тангенциальные перемещения.

На рис. 9 для зубчатых колес дисковой формы приведены кривые для определения податливости прилежащей к зубу части обода, построенные по формулам (2.6) и (2.7).

§ 3. Контактная деформация зубьев

Обычно расчет на контактную прочность зубьев зубчатых колес сводится к классической контактной задаче теории упругости о двух цилиндрах в предположении, что в любой фазе зацепления зубья эвольвентных зубчатых колес могут быть заменены прямыми круговыми цилиндрами, кривизна которых равна кривизне эвольвент в соответствующей контактной точке. Контактная деформация зубьев цилиндрических зубчатых колес определяется обычно также с использованием результатов решения плоской контактной задачи теории упругости. Такой подход к контактным расчетам зубчатых передач является общепринятым и используется различными исследователями. Общая формула для сближения осей цилиндров может быть записана в виде [3, 41]

$$w_k = \frac{2(1-\nu^2)}{\alpha E} p \left(\ln \frac{4R_1R_2}{b^2} - \frac{\nu}{1-\nu} + \Delta \right), \qquad (3.1)$$

где Δ — поправка, учитывающая влияние уравновешивающих контактную нагрузку сил (табл. 1).

Из приведенных в таблице выражений для поправки Δ следует, что формула Лундберга дает значительно бо́льшие величины сближения осей цилиндров, чем остальные формулы. Расчеты по

Таблица 1. Поправка Δ (3.1), учитывающая влияние уравновешивающих контактную нагрузку сил на величину сближения осей цилиндров

Источник	Δ	Δ при $\nu = 0{,}3$
[97]	$\ln \frac{l^2}{R_1R_2} + \ln 4e + \frac{\nu}{1-\nu}$	$2{,}815 + \ln \frac{l^2}{R_1R_2}$
[46]	$\ln \frac{4}{e} + \frac{2\nu}{1-\nu} \rightarrow$	1,244
[31]	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{1-\nu}$	1,095
[55]	$\ln \frac{4}{e} + \frac{\nu}{1-\nu}$	0,815
[72]	$\frac{\nu}{1-\nu}$	0,429
[3]	0	0

ней контактной деформации зубьев зубчатых колес, выполненные в работах [3, 7], показали, что последняя составляет 50—70% от суммарной деформации зубьев. Такое завышение величины контактной деформации связано, по-видимому, в том числе и с погрешностью формулы. Аналогичный результат был получен в работах [78, 11], где завышение определенных по формуле Лундберга контактных деформаций зубьев зубчатых колес над экспериментальными значениями превосходило 1,8—4,5 раза.

Сопоставление остальных формул таблицы показывает, что они дают практически одинаковую величину сближения осей цилиндров, поэтому можно считать, что учет влияния уравновешивающих контактную нагрузку сил незначительно изменяет результаты расчета. Наиболее полно величину w_k определяет формула работы [55]; остальные зависимости для w_k получаются из нее как частный случай при некоторых допущениях.

Основной трудностью при определении контактной деформации зубьев является назначение координат базовых точек z_1 и z_2, сближение которых принимается за меру контактной деформации соприкасающихся зубьев.

Определим контактную деформацию упругих тел при первоначальном касании по линии, исходя из следующих соображений. Известно, что контактные напряжения достаточно быстро затухают по мере удаления от точки первоначального касания тел: по данным Н. М. Беляева, на глубине $z = 7{,}5\ b$ нормальные напряжения σ_z составляют всего 13% от максимальной величины на площадке контакта. Поэтому можно принять, что на глубине, например, $z = 20b$ нормальные напряжения полностью отсутствуют.

Петрусевич [55] считает, что в качестве базовой можно взять точку, расположенную на половине расстояния от точки первоначального касания упругих тел до точки, в которой контактные напряжения практически равны нулю. Исходя из сказанного выше, контактная деформация двух упругих тел с первоначальным касанием по линии (в том числе зубьев зубчатых колес) может быть определена как сближение точек, находящихся на расстоянии $z = 10b$ по разные стороны от площадки контакта тел, на линии действия сжимающей тела нагрузки. Подставляя значения $z_1 = z_2 = 10\ b$, получим

$$w_k = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\, p\left[2\ln 20 - \frac{\nu}{1-\nu}\right]. \tag{3.2}$$

Полагая в этой формуле $\nu = 0{,}3$, получим величину контактной податливости упругих тел при первоначальном касании по линии в виде

$$\delta_k = w_k/p = 3{,}22/E, \tag{3.3}$$

что для стальных тел ($E = 2{,}15\cdot 10^6\ кГ/см^2$) даст

$$\delta_k = 1{,}5\cdot 10^{-6}\ см^2/кГ. \tag{3.4}$$

Формулы (3.3) и (3.4) могут быть использованы для приближенной оценки контактной деформации двух упругих тел при их первоначальном касании по линии. Применение этих формул в расчетной практике представляется физически более оправданным, чем произвольный выбор базовых точек без учета характера приложения внешней нагрузки к реальным телам. Условность предлагаемого метода определения контактной деформации заключается в отсутствии четкости в предложении «напряжения в точке практически равны нулю». Однако в пользу его говорит то, что координаты точек, напряжения в которых могут быть приняты равными нулю, находятся под знаком логарифма, поэтому не требуется большей точности в их определении.

Из табл. 1 видно, что погрешность различных методов определения контактной деформации цилиндров может быть оценена поправкой Δ, принимающей максимальное значение $\Delta_{max} = 1{,}244$. При этом, как указано выше, все методы дают, с точностью, достаточной для инженерных расчетов, одинаковую величину упругой деформации цилиндров.

Погрешность в определении координаты базовой точки может быть найдена из условия

$$\ln k_1 \cdot k_2 = 1{,}244,$$

где k_i — отношение действительной координаты базовой точки к принятой в формуле (3.2)

$$k_i = z_i/10b.$$

Полагая $z_1 = z_2 = z$ и $k_1 = k_2 = k$, найдем $2 \ln k = 1{,}244$ и $k = 1{,}87$.

Таким образом, даже допуская ошибку в определении координат базовых точек в два раза, мы будем находиться в пределах разброса, определяемого выбором той или иной формулы для расчетного определения контактной деформации сжимаемых тел (табл. 1). Это дает основание использовать формулы (3.3) и (3.4) в расчетной практике для определения контактной деформации упругих тел, в том числе зубьев зубчатых колес.

Назначение базовых точек для определения контактной деформации зубьев зубчатых колес должно, очевидно, зависеть от общего метода нахождения суммарной упругой деформации зубьев. По-видимому, необходимым условием выбора базовых точек является расположение этих точек на самих контактирующих зубьях.

В работе [11], например, контактная деформация зубьев определена как сближение центров кривизны контактирующих зубьев зубчатых колес. Подставляем в (3.1) значение половины ширины площадки контакта цилиндров

$$b = 2\sqrt{2\vartheta pR}, \tag{3.5}$$

где ϑ — упругая постоянная $\vartheta = (1 - \nu^2)/\pi E$; R — приведенный

радиус кривизны контактирующих зубьев определяется из зависимости

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2},$$

R_1, R_2 — радиусы кривизны зубьев в точке контакта. Верхний знак в этой формуле относится к наружному, а нижний — к внутреннему зацеплению. Отсюда получим

$$R = R_1 R_2/(R_2 \pm R_1) = R_1 R_2/A \sin\alpha,$$

где A — межцентровое расстояние зубчатой передачи.

Подставляя значение b из (3.5), получим

$$\delta_k = \frac{w_k}{p} = 2\vartheta\left(\ln\frac{A\sin\alpha}{2p\vartheta} + 0{,}815\right). \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) позволяет сделать два вывода. Во-первых, контактная податливость зубьев зубчатых колес зависит от нагрузки, хотя, как показал выполненный выше расчет коэффициента k, эта зависимость несущественна. Например, приведенный в работе [11] расчет показал, что с изменением нагрузки в 10 раз контактная податливость зубьев изменилась всего на 70%. Во-вторых, контактная податливость зубьев зубчатых колес по фазе зацепления не изменяется, так как сумма радиусов кривизны контактирующих зубьев $R_1 \pm R_2 = A \sin\alpha$ остается постоянной величиной в любой контактной точке.

Средняя величина контактной податливости зубьев зубчатых колес, определенная по формуле (3.6) [46], оказалась равной

$$\delta_k = 6{,}88/E,$$

что для стальных зубчатых колес дает

$$\delta_k = 3{,}20 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ.$$

В работе [66] контактная податливость зубьев зубчатых колес, определенная при тех же допущениях, что и (3.6), оказалась равной $\delta_k = 7{,}70/E$, что для стальных зубчатых колес даст $\delta_k = 3{,}58 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ$.

Сравнивая полученные результаты с формулой (3.4), видим, что если за меру контактной деформации зубьев принять сближение точек, выходящих за пределы контактирующих зубьев, то получится значительное завышение деформации зубьев.

Другим условием выбора базовых точек на контактирующих зубьях является достаточное удаление их от точки первоначального касания зубьев, так как в противном случае будет выявлена только часть контактной деформации зубьев. По-видимому, сформулированное выше условие $z = 10\,b$ определяет минимальную координату базовой точки, максимальной же координатой, оче-

видно, является расстояние от точки начального касания зубьев до точки пересечения линии зацепления с нерабочим профилем зуба. Так, например, в работе [76] за координату базовой точки принята ее максимальная величина.

Однако, как указано выше, выбор базовых точек не может быть произвольным, а должен зависеть от общего метода определения суммарной упругой деформации зубьев зубчатых колес. Если, например, изгибная деформация зубьев определяется как смещение точки пересечения линии зацепления с осью симметрии зуба, измеренное вдоль линии действия нагрузки (совпадающей с линией зацепления), то при определении контактной деформации зубьев зубчатых колес эта же точка должна быть выбрана в качестве базовой.

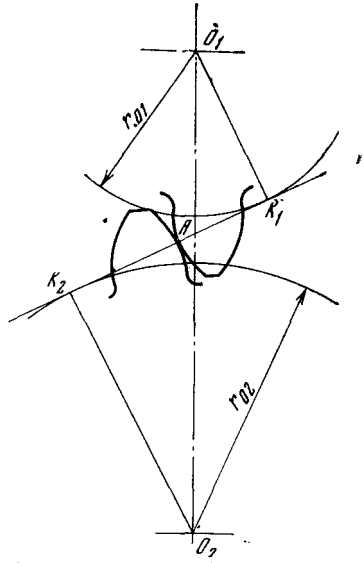


Рис. 10. К выбору базовых точек на зубьях

Если же, как принято нами, изгибная деформация зуба определяется относительно сечения заделки зуба в обод зубчатого колеса и отдельно определяется деформация прилежащей к зубу части обода, то за базовую точку должна быть выбрана точка пересечения сечения заделки зуба в обод с осью его симметрии. Рассмотрим оба метода определения базовых точек на зубьях зубчатых колес.

Примем за базовые точки пересечения линии зацепления и осей симметрии контактирующих зубьев (рис. 10).

На рис. 11 приведен график для определения коэффициента геометрии зубчатой передачи $K_г$ в зависимости от числа зубьев шестерни z_1 и передаточного числа зубчатой передачи. Контактная податливость зубьев зубчатых колес в полюсе зацепления может быть найдена из рис. 12 по значениям отношения p/m и коэффициента геометрии, определенного из рис. 11 [3].

По приведенным формулам и графикам может быть определена контактная податливость пары зубьев зубчатых колес в полюсе зацепления. Для определения величины δ_k в произвольной точке на линии зацепления необходимо найти для этой точки коэффициент геометрии $K_Г$, который, очевидно, зависит от фазы зацепления.

Таким образом, для того чтобы учесть при расчете контактной податливости изменение по фазе зацепления приведенного радиуса кривизны профилей контактирующих зубьев, необходимо от найденного по графику рис. 11 коэффициента геометрии передачи вычесть величину $k_\rho = \lg k_x$.

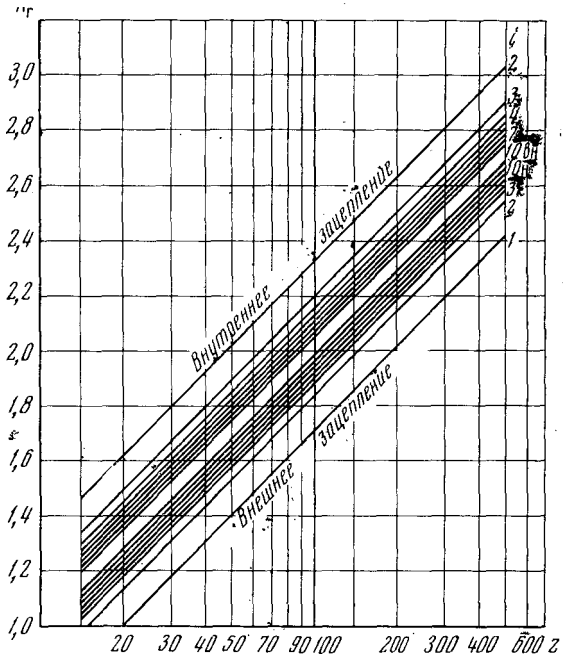


Рис. 11. Зависимость коэффициента геометрии $K_г$ от числа зубьев шестерни z и вида передачи

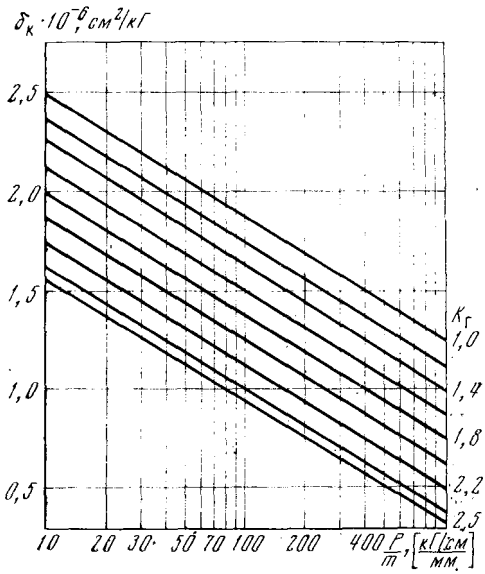


Рис. 12. Зависимость контактной податливости зубьев $\delta_к$ от нагрузки p/m и коэффициента геометрии $K_г$

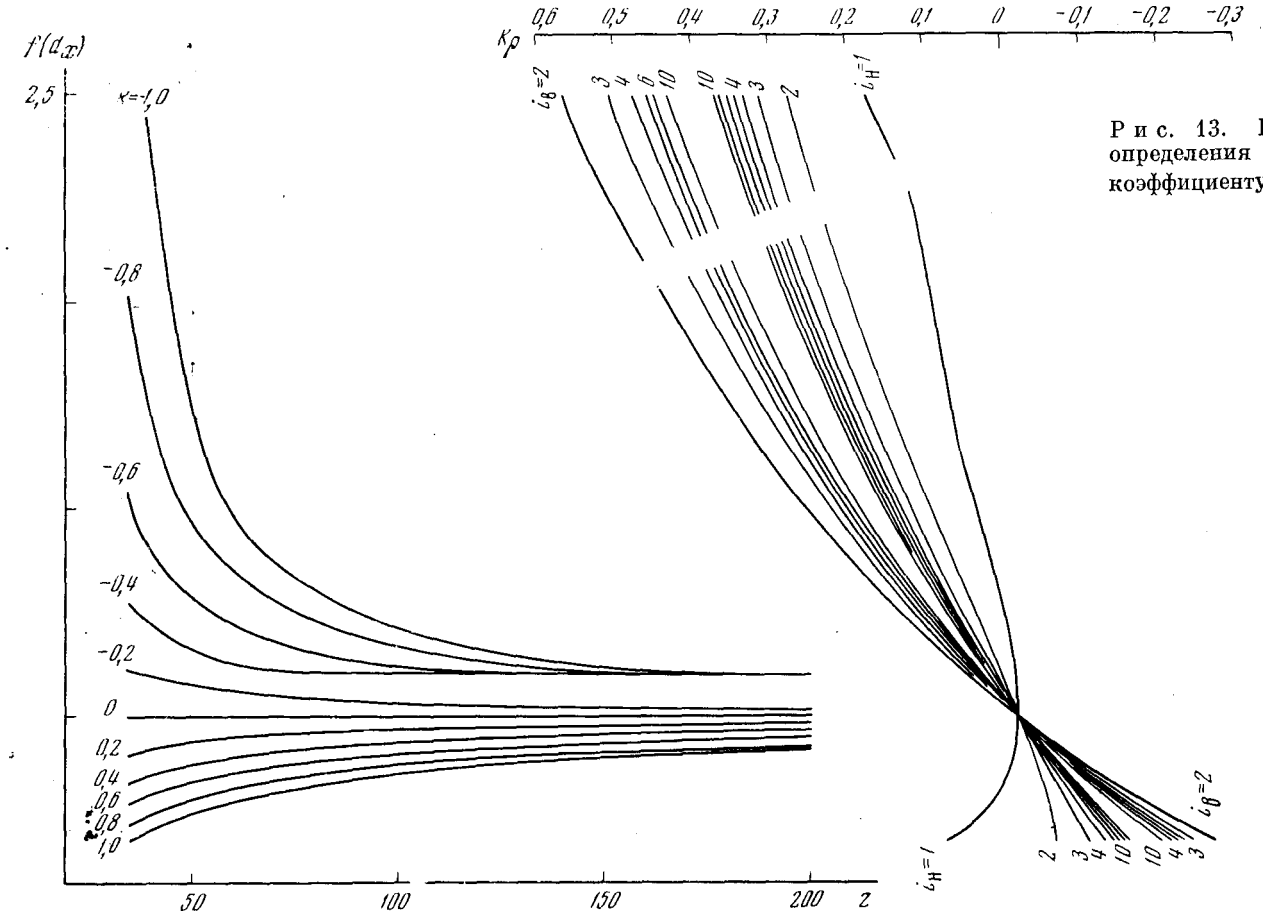


Рис. 13. Номограмма для определения поправки K_p к коэффициенту геометрии $K_г$

На рис. 13 приведена номограмма для коэффициента k_ρ, на которой совмещены графики $f(\alpha_x) = f(z, \Delta r)$ и $k_\rho = F[f(\alpha_x)\ i]$. При использовании этой номограммой для данного числа зубьев шестерни z_1 и контактной точки на профиле зуба (Δr) находят коэффициент $f(\alpha_x)$, величина которого сносится на кривые правого графика. После этого по найденной величине $f(\alpha_x)$ и заданному передаточному числу i находят коэффициент K_ρ, который необходимо вычесть из коэффициента геометрии и K_ρ, найденного из рис. 11.

Очевидно, что с изменением фазы зацепления будут меняться также координаты базовых точек z_1, z_2. Поэтому из коэффициента геометрии $K_г$, найденного по рис. 11, необходимо вычесть коэффициент

$$k_z = \lg \frac{z_{1к}\, z_{2к}}{z_{д1}\, z_{д2}} = \lg \frac{z_{1к}}{z_{д1}} + \lg \frac{z_{2к}}{z_{д2}}, \qquad (3.7)$$

где $z_{1к}$, $z_{2к}$ — координаты базовых точек сопряженных профилей зубьев в точке контакта k, $z_{д1}$, $z_{д2}$ — то же в полюсе зацепления.

Теперь определим контактную податливость зубьев в предположении, что базовыми являются точки пересечения осей симметрии контактирующих зубьев с сечением заделки зубьев в ободья зубчатых колес (рис. 14). В соответствии с методикой поэлементного определения составляющих суммарной деформации

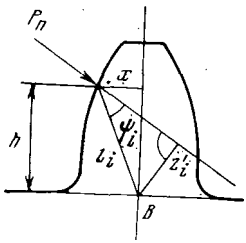


Рис. 14. Выбор базовых точек при определении контактной деформации зубьев зубчатых колес

зубьев зубчатых колес в качестве базовой выбираем точку B, лежащую в основании зуба на оси его симметрии. Поскольку в данном случае базовая точка не лежит на линии действия сжимающей силы P, то для определения относительного смещения точек приложения нагрузки и базовой, измеренного вдоль линии действия силы P (линия зацепления), необходимо воспользоваться более общей формулой

$$w_i = \vartheta P \left[1 + 2\ln\frac{2l_i}{b} - \frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{z_i'}{l_i}\right)^2\right] \quad (i = 1, 2), \qquad (3.8)$$

где l_i — расстояние между точкой приложения нагрузки P и базовой точкой B, z_i — проекция расстояния l_i на линию действия нагрузки P.

Из рис. 14 следует, что

$$\frac{z_i'}{l_i} = \cos\psi_i \quad (i = 1, 2),$$

где ψ_i — угол между l_i и линией зацепления.

Из (8) контактная деформация зубьев будет равна

$$w_к = w_1 + w_2 = 2p\vartheta\left[\ln\frac{4l_1l_2}{b^2} + 1 - \frac{1}{2(1-\nu)}(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)\right]. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) может быть использована для определения контактной деформации зубьев при произвольном выборе базовых точек. Для упрощения расчетов по формуле (3.9) представляется целесообразным свести ее к зависимости (3.10), введя поправку в коэффициент геометрии $K_г$. Таким образом, будем иметь

$$\delta_к = \frac{w_k}{p} = 2\vartheta\left[\ln\frac{4z_1 \cdot z_2}{b^2} - \frac{\nu}{1-\nu} + \Delta_1' + \Delta_2'\right], \tag{3.10}$$

где

$$\Delta_i' = \ln\frac{l_i}{z_i} + \frac{1}{2(1-\nu)}(1 - \cos\psi_i) \quad (i = 1, 2). \tag{3.11}$$

Из формулы (3.10) следует, что для определения контактной деформации зубьев можно воспользоваться приведенными выше графиками, однако при этом от найденной по номограмме (рис. 11) величины коэффициента геометрии $K_г$ следует вычесть сумму $(\Delta_1 + \Delta_2)$, где

$$\Delta_i = \lg\frac{l_i}{z_i} + \frac{(1 - \cos\psi_i)}{4{,}606(1-\nu)} \quad (i = 1, 2). \tag{3.12}$$

В остальном последовательность определения контактной податливости зубьев зубчатых колес остается прежней.

Найдем величины, входящие в формулу (3.12). Из рис. 14 следует, что

$$l = \sqrt{h^2 + x^2},$$

где h — расстояния от точки приложения нагрузки до основания зуба, x — полухорда в текущем сечении

$$\psi = \gamma - \arccos\frac{h}{l},$$

где γ — угол между нормалью к профилю зуба и полухордой x. В соответствии с принятым выше определением

$$z_1 = z_2 = m\frac{\pi}{4\cos\alpha_\varepsilon}.$$

§ 4. Экспериментальные исследования деформации прямых зубьев

Изложенный выше метод теоретического определения суммарной деформации зубьев основан на ряде допущений, оценка которых в общем виде не всегда представляется возможной. В связи с этим ниже приведены результаты сопоставления расчетных величин деформации зубьев зубчатых колес, определенных по изложенной методике, с экспериментальными данными.

Экспериментальное определение сближения осей, контактирующих по образующим цилиндров, выполнено А. Н. Динником [31]. Расчетное значение сближения осей цилиндров с высокой точностью совпало с экспериментально найденными величинами w_k [3].

Экспериментальное исследование деформации зубьев цилиндрических зубчатых колес наиболее полно выполнено в работах [76, 78, 79]. Измерение перемещений характерных точек проводилось в статических условиях рычажным тензометром, призмы которого устанавливались в так называемые установочные и базовые точки (рис. 15).

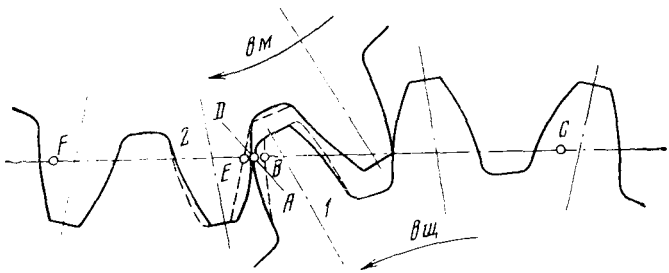


Рис. 15. Схема измерения деформации зубьев зубчатых колес [79]

B, E — установочные точки, *C, F* — базовые точки

Названные точки располагались на линии зацепления, причем установочные точки на расстоянии 1,5 *мм* (для наружных зубьев [78]) и 1 *мм* (для внутренних зубьев [79]) по обе стороны от точки касания зубьев, а базовые точки — в значительном удалении от точки касания зубьев.

За изгибную деформацию зуба было принято сближение установочной и базовой точек данного зубчатого колеса, а за контактную деформацию зубьев — сближение установочных точек контактирующих зубьев.

Рассматриваемый метод определения деформации зубьев имеет тот недостаток, что выбор расположения установочных точек не зависит от нагрузки, прикладываемой к зубьям. Но, как указано выше, от выбора этих точек зависит величина измеренной контактной деформации зубьев, поэтому такой метод позволяет достаточ-

но точно определить суммарную деформацию контактирующих зубьев. Однако при неудачном выборе установочных точек может быть допущена ошибка в разделении суммарной деформации зубьев. Выбор базовых точек не вызывал затруднений, так как значительная жесткость обода зубчатого колеса дисковой формы позволяла пренебречь влиянием податливости ободьев зубчатых колес на жесткость зубчатого зацепления.

Как показывает рис. 15, базовые точки значительно отстоят от контактирующих зубьев, поэтому можно считать их неподвижными. Следовательно, сближение установочной и базовой точек по самой идее эксперимента должно быть равно суммарной деформации зуба — изгибной и прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса, а не только изгибной деформации зуба, как это указано в работе [78].

Проведенное по указанной методике экспериментальное определение контактной податливости зубьев дало следующие результаты:

$$\delta_к = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ \text{ — для наружных зубьев,}$$

$$\delta_к = 0{,}95 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ \text{ — для внутренних зубьев.}$$

Сравнение значений контактной податливости зубьев с результатами ее расчетного определения (§ 1. 3) показывает, что полученные величины $\delta_к$ имеют заниженное значение. Действительно, как показано выше, установочные точки не должны располагаться от точки касания зубьев ближе, чем на расстояние $z = 10b$, в противном случае будет измерена только часть контактной деформации зубьев. При этом $\delta_к = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ$. В эксперименте базовые точки всегда следует располагать на расстоянии $z \geqslant 10b$ от точки первоначального касания зубьев.

Ширина площадки касания профилей зубьев $2b$ не остается постоянной по фазе зацепления, а зависит от расположения точки контакта на профилях зубьев. Поэтому для данных нагрузки, прикладываемой к передаче, и числа зубьев зубчатых колес определяются пределы изменения величины $2b$, после чего назначается координата $z = 10\ \bar{b}_{max}$ ($\bar{b}$ — максимальная в пределах активной части линии зацепления полуширина площадки касания зубьев).

Таким образом, мерой правильного выбора базовых (установочных) точек является равенство $z = 10b$. В работе [79] приведен пример определения контактной податливости зубьев, для которого $b = 3{,}86 \cdot 10^{-2}\ см$, что дает при $z_1 = z_2 = 1{,}5\ мм = 3{,}9\ b$ (меньше $10b$).

В данном случае установочные точки оказались расположенными слишком близко от точки начального касания зубьев, поэтому при эксперименте определялась только часть контактной деформации зубьев. Если в формуле (3.1) принять $z/b = 3{,}9$, то

получится расчетная величина контактной податливости зубьев

$$\delta_к = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\left[2\ln 2 \cdot 3{,}9 - \frac{\nu}{1-\nu}\right] = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ,$$

совпадающая с рекомендованным в работе [79] значением $\delta_к$ для зубьев с внешним зацеплением. Этот пример объясняет причину расхождения расчетной и экспериментальной величин контактной податливости зубьев зубчатых колес.

Отсутствие в работе [78] величин нагрузок, действующих в зацеплении, не позволяет расчетным путем определить контактную деформацию зубьев зубчатых колес внутреннего зацепления при выбранных установочных точках. Однако то, что при уменьшенном расстоянии между установочными точками получена меньшая величина контактной податливости зубьев, говорит о неудачном выборе установочных точек.

Неудачный выбор установочных точек привел к занижению величин контактной податливости зубьев и соответствующему завышению изгибной податливости зубьев зубчатых колес. Поэтому приведенные в работе [79] экспериментальные данные были уточнены следующим образом [7]: для каждого эксперимента определялась разность между расчетной $\delta_к^р$ и экспериментальной $\delta_к^э$ величинами контактной податливости зацепляющихся зубьев:

$$\Delta\delta_к = \delta_к^р - \delta_к^э = 1{,}5 \cdot 10^{-6} - \delta_к^э.$$

После этого уточненную величину изгибной податливости зацепляющихся зубьев определяли как разность

$$\delta_{и_i}^у = \delta_{и_i}^э - 0{,}5\Delta\delta_к \quad (i = 1, 2),$$

где $\delta_{и_i}^у$, $\delta_{и_i}^э$ — уточненная (экспериментальная) величина изгибной податливости зуба i-го колеса.

Сопоставление уточненных $\delta_и^у$ и расчетных $\delta_и + \delta_{осн}$ (табл. 2) величин составляющих суммарной податливости зубьев показывает, что в промежуточных контактных точках совпадение сопоставляемых величин хуже, чем в крайних точках активной части линии зацепления [7].

В табл. 2 выполнено сопоставление расчетных и экспериментальных величин суммарной податливости зубьев. Поскольку величина нагрузки, при которой измерялись упругие деформации зубьев зубчатых колес, неизвестна, то не удалось определить контактную составляющую суммарной податливости зубьев в соответствии с принятой общей методикой поэлементарного определения составляющих упругой деформации зубьев. Поэтому во всех расчетах, независимо от расположения контактной линии зацепления, принимали $\delta_к = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ$.

Приведенные в табл. 2 значения изгибной податливости зубьев определялись как произведение изгибной податливости клина

Таблица 2

№ п/п	Число зубьев		Модуль m, *мм*	Измеренная податливость зубьев $\delta_{\Sigma}^{э} \cdot 10^6$ *см²/кГ*				
	z_1	z_2		I	II	III	IV	V
1	90	90	4	8,39	—	6,43	—	9,06
2	60	120	4	7,75	—	5,81	—	7,27
3	60	60	6	4,92	—	5,26	—	7,55
4	60	180	3	8,78	—	6,96	—	8,70
5	30	60	8	8,15	6,97	6,13	6,69	8,32
6	45	45	8	8,09	5,83	5,37	5,92	7,61
7	45	135	4	8,44	—	6,38	—	8,17
8	36	36	10	8,40	7,11	6,30	7,24	8,52
9	22	68	8	8,62	7,26	6,19	7,09	8,80
10	24	48	10	8,17	6,41	5,85	6,32	8,83
11	18	54	10	8,17	7,24	5,92	6,85	8,89

I — начальная фаза зацепления, II — дополюсная фаза зацепления, III — полюс, IV — заполюсная фаза зацепления, V — конечная фаза зацепления.

Таблица 2а

Изгибная податливость зубьев $\delta_{u}^{p} \cdot 10^6$ *см²/кГ*					Податливость основания зубьев $\delta_{осн}^{p} \cdot 10^6$ *см²/кГ*				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
1,01	0,10	0,43	1,38	3,57	1,16	1,25	1,47	1,86	2,45
3,57	1,38	0,43	0,10	0,01	2,45	1,86	1,47	1,25	1,16
0,01	0,10	0,46	1,48	3,78	1,05	1,14	1,39	1,90	2,41
3,46	1,32	0,4	0,10	0,01	2,44	1,92	1,54	1,30	1,22
0,01	0,10	0,46	1,48	3,78	1,05	1,14	1,39	1,90	2,41
3,78	1,48	0,46	0,10	0,01	2,41	1,90	1,39	1,14	1,05
0,01	0,10	0,46	1,48	3,78	1,05	1,14	1,39	1,90	2,41
3,40	1,30	0,40	0,10	0,01	2,46	1,96	1,61	1,38	1,30
0,01	0,12	0,52	1,63	4,20	0,86	1,01	1,29	1,65	2,31
3,78	1,46	0,46	0,10	0,01	2,41	1,90	1,39	1,14	1,05
0,01	0,11	0,50	1,55	3,96	0,97	1,07	1,33	1,73	2,29
3,96	1,55	0,50	0,11	0,01	2,29	1,73	1,33	1,07	0,97
0,01	0,11	0,50	1,55	3,96	0,97	1,07	1,33	1,73	2,29
3,24	1,32	0,40	0,10	0,01	2,44	1,93	1,56	1,33	1,25
0,01	0,12	0,50	1,60	4,08	0,91	1,04	1,31	1,67	2,28
4,08	1,60	0,50	0,12	0,01	2,28	1,67	1,31	1,04	0,91
0,01	0,13	0,56	1,70	4,31	0,84	0,99	1,28	1,72	2,34
3,65	1,31	0,45	0,10	0,01	2,44	1,81	1,41	1,18	1,09
0,01	0,12	0,52	1,65	4,20	0,84	0,98	1,27	1,69	2,32
3,80	1,50	0,48	0,10	0,01	2,30	1,75	1,35	1,09	1,00
0,01	0,14	0,58	1,72	4,36	0,80	0,98	1,26	1,75	2,37
3,79	1,49	0,47	0,10	0,01	2,32	1,77	1,35	1,12	1,02

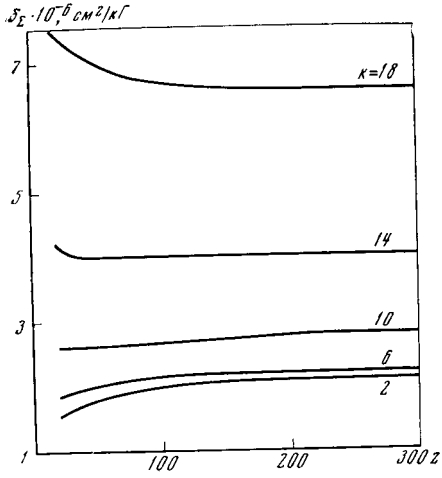
Таблица 2б

Расчетная податливость зубьев $\delta_{\Sigma}^{p} \cdot 10^{6}$ см²/кГ					$\delta_{\Sigma}^{p}/\delta_{\Sigma}^{э}$				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
8,69	6,09	5,30	6,09	8,69	1,04	—	0,84	—	0,97
8,46	5,98	5,31	6,28	8,92	1,09	—	0,91	—	1,20
8,75	6,12	5,20	6,12	8,75	1,09	—	0,99	—	1,18
8,42	6,00	5,36	6,36	8,90	0,96	—	0,77	—	1,02
8,56	5,91	5,16	6,02	8,07	1,04	0,84	0,84	0,90	0,97
8,73	5,96	5,16	5,96	8,73	1,08	1,02	0,85	1,01	1,15
8,18	5,93	5,29	6,21	9,01	0,97	—	0,83	—	1,10
7,78	5,93	5,12	5,93	7,78	0,93	0,84	0,82	0,82	0,91
8,44	5,74	5,20	6,20	9,25	1,16	0,79	0,84	0,88	1,05
8,45	5,85	5,12	6,03	9,03	1,03	0,91	0,88	0,96	1,02
8,42	5,88	5,16	6,19	9,26	1,03	0,81	0,87	0,91	1,04

$\delta_{и,кл}$ (см. рис. 6) на коэффициент кривизны $k_э$ (см. рис. 5). Поскольку экспериментальные зубчатые колеса имели дисковую форму, то податливость прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса определялась непосредственно из рис. 16. Выполненное в табл. 2, 2а, 2б сопоставление расчетных и экспериментальных величин суммарной податливости зубьев показывает, что отношение $\delta_{\Sigma}^{p}/\delta_{\Sigma}^{э}$ близко к единице в крайних контактных точках и уменьшается в полюсе зацепления, что объясняется, по-видимому, приближенным определением контактной податливости зубьев. Таким образом, изложенная выше методика определения составляющих упругой деформации зубьев дает удовлетворительное совпадение с результатами экспериментов, что дает основание рекомендовать использование ее в расчетной инженерной практике.

Таблица 3. **Сопоставление расчетных величин суммарной податливости зубьев с результатами эксперимента [81]**

Число зубьев z	Точка контакта k	$\delta_{и}^{'э} \cdot 10^{6}$, см²/кГ	$\delta_{и}^{'p} \cdot 10^{6}$, см²/кГ	$\delta_{и}^{'p}/\delta_{и}^{'э}$
14	18	7,33	6,90	0,94
	14	3,58	3,65	1,02
	10	2,44	1,81	0,74
22	18	6,60	6,61	1,00
	14	3,70	3,35	0,91
	10	1,84	1,81	0,98
36	18	5,30	6,35	1,20
	14	2,40	3,25	1,35
	10	1,19	1,85	1,55



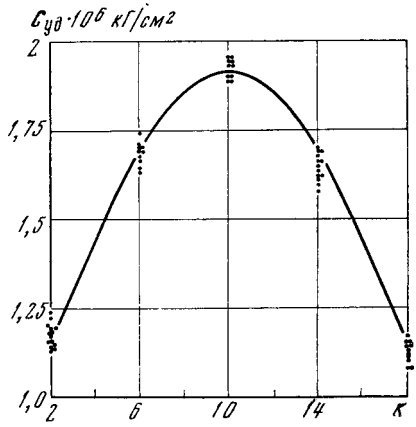


Рис. 16. Зависимость суммарной податливости зубьев зубчатых колес дисковой формы от числа зубьев z

Рис. 17. Изменение податливости зубьев зубчатых колес дисковой формы по фазе зацепления

В работе [81] выполнено статическое исследование напряженного состояния зубьев зубчатых колес на моделях из оргстекла. При испытаниях измерялись перемещения точек приложения нагрузки вдоль линии ее действия $\delta_п$, а также перемещение точки пересечения оси симметрии зуба с хордой, соединяющей центры кривизны выкружек зуба δ_0, причем последнее перемещение измерялось вдоль хорды по нормали к оси симметрии зуба.

Из методики измерения перемещений точки приложения нагрузки следует, что таким путем была определена суммарная изгибная податливость зуба $\delta_и + \delta_{осн}$, поэтому в табл. 3 приведено сопоставление расчетных величин суммарной изгибной податливости зубьев $\delta_\Sigma - 0{,}5\ \delta_к$ с экспериментально замеренными перемещениями.

При решении многих задач по исследованию зубчатых передач возникает необходимость знать изменение податливости зубьев по фазе зацепления — это вопросы, касающиеся преднамеренного изменения правильной эвольвентной формы зубьев с целью улучшения динамических характеристик зубчатой передачи, исследование распределения нагрузки между одновременно зацепляющимися парами зубьев, исследование возможности возникновения в системе редуктора параметрических колебаний, связанных с периодическим изменением податливости зубьев по фазе зацепления.

Изложенный выше метод расчетного определения составляющих упругой деформации зубьев зубчатых колес позволяет полу-

чить ответ на вопрос об изменении податливости собственно зубьев зубчатых колес по фазе зацепления. Для полного решения вопроса об изменении по фазе зацепления податливости всего зубчатого зацепления необходимо также учесть деформацию зубьев, обусловленную податливостью ободьев зубчатых колес.

В практике расчета редукторов часто встречаются случаи, когда оба сопряженных зубчатых колеса имеют дисковую форму. В этом случае с помощью рис. 16 могут быть построены кривые изменения податливости зубьев зубчатых колес по фазе зацепления (рис. 17).

В работе [99] изгибная деформация зубьев определялась с помощью индуктивного датчика, установленного на торце зуба. Таким путем была определена изгибная деформация зубьев по фазе зацепления. После определения расчетным путем контактной деформации зубьев была построена зависимость суммарной жесткости пары зубьев от фазы зацепления.

Максимальное значение удельной жесткости пары зубьев зависит от нагрузки (поскольку расчетная величина контактной деформации пары зубьев нелинейно зависит от нагрузки) и изменяется от $1{,}7 \cdot 10^5$ до $1{,}9 \cdot 10^5$ *кГ/см*^{2} с изменением удельной нагрузки от 200 до 1200 *кГ/см*.

Глава 2. ДЕФОРМАЦИЯ КОСЫХ ЗУБЬЕВ

Теоретическое решение задачи о деформации косых зубьев представляет значительные трудности, вызванные пространственным характером нагружения и деформирования косых зубьев и невозможностью использования известных в теории упругости решений, поскольку характерные размеры зубьев во всех трех направлениях являются величинами одного порядка. Поэтому при ориентировочных расчетах деформации косых зубьев расчетные формулы строят с использованием величин деформации прямых зубьев и введением корректирующих коэффициентов, учитывающих наклон зубьев в косозубых зубчатых колесах.

Для уточнения расчетов, относящихся к исследованию распределения нагрузки по длине контактных линий в косозубых зубчатых зацеплениях, приведенные формулы не могут быть использованы. Поэтому ниже дается приближенное решение задачи о деформации косых зубьев, полученное на основе принятия некоторых физических гипотез о характере деформирования косых зубьев. При этом выполненное выше теоретическое исследование податливости прямых зубьев является составной частью исследования податливости косых зубьев и распределения нагрузки по длине контактных линий в косозубом зацеплении.

§ 1. Методы определения деформации косых зубьев

Задача о деформации косых зубьев должна рассматриваться как пространственная задача теории упругости, характерной особенностью которой является взаимное влияние условий контакта зубьев (распределения нагрузки по длине контактных линий) на деформацию зубчатого зацепления и обратно. Существующие методы расчета распределения нагрузки по длине контактных линий и податливости зубчатого зацепления строятся на ряде допущений, позволяющих тем или иным способом наметить путь нахождения искомых величин.

Решение задачи о распределении нагрузки по длине контактных линий и податливости зубчатого зацепления может быть выполнено только на базе рассмотрения единой контактной задачи для разомкнутой в месте контакта зубьев цепи упругих элементов, включающих зубья и ободья зубчатых колес, валы и опоры, т. е. всю зубчатую передачу в целом. Характер упругого деформирования элементов зубчатой передачи учитывается при постановке контактной задачи, принятием некоторых предположений о свойствах контактирующих зубьев по длине контактной линии.

При постановке задачи о контакте зубьев зубчатая передача размыкается в месте контакта зубьев по контактной линии и отброшенная часть передачи заменяется действием распределенной вдоль контактной линии нагрузки. Очевидно, что на обе части зубчатой передачи по длине контактной линии действует одинаковая распределенная нагрузка. Бесконечно малый прогиб $dw(x)$ в некоторой точке контактной линии с координатой x, вызванный элементарной нагрузкой $p(t)\,dt$, приложенной в точке контактной линии с координатой t, может быть представлен в виде

$$dw(x) = K(x, t)\,p(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где $K(x, t)$ — представляет собой некоторую функцию, определяющую прогиб в точке контактной линии с координатой x под действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке с координатой t.

Прогиб в точке контактной линии с координатой x, обусловленный всей приложенной нагрузкой, получается интегрированием соотношения (1.1) по всей длине контактной линии

$$w(x) = \int_0^L K(x, t)\,p(t)\,dt, \tag{1.2}$$

где L — длина контактной линии, зависит от расположения ее на боковой поверхности контактирующих зубьев, x — координата рассматриваемой точки вдоль контактной линии, $p(t)$ — произвольно заданная распределенная по длине контактной линии нагрузка, $K(x, t)$ — функция влияния или функция Грина для одномерной задачи.

Формула (1.2) может быть построена для обеих частей передачи в виде

$$w_1(x) = \int_0^L K_1(x, t)\,p(t)\,dt, \qquad w_2(x) = \int_0^L K_2(x, t)\,p(t)\,dt. \tag{1.3}$$

При отсутствии первоначального неприлегания зубьев сумма этих перемещений — сближение обеих частей передачи — есть величина постоянная и независящая от координаты x.

$$\Delta = w_1(x) + w_2(x) = \int_0^L [K_1(x, t) + K_2(x, t)]\,p(t)\,dt, \tag{1.4}$$

где Δ — сближение контактирующих тел в нормальном направлении, являющееся мерой упругого деформирования зубчатого зацепления.

Равнодействующая нагрузок, распределенных по длине контактной линии, должна равняться внешней расчетной нагрузке,

действующей в зубчатом зацеплении

$$\int_0^L p(t)\,dt = P, \tag{1.5}$$

где P — расчетная нагрузка в зубчатом зацеплении считается заданной величиной.

Два интегральных уравнения (1.4) и (1.5) полностью формулируют задачу о контакте в зубчатом зацеплении и позволяют находить искомые величины Δ и $p(t)$. Отношение

$$\delta = \Delta/P \tag{1.6}$$

будет удельной податливостью однопарного зубчатого зацепления.

Существующие методы решения контактной задачи зубчатого зацепления получены из системы (1.4) и (1.5) уравнений, но при некоторых допущениях. Сложность в решении сформулированной задачи определяется тем, что для такого сложного объекта, каким является зубчатое зацепление, не удается в аналитической форме построить функцию влияния $K(x, t)$, входящую в уравнение (1.4).

В работе [34] функция влияния $K(x, t)$ определялась на модели зуба экспериментальным путем. Контактную линию разбивали на n участков, на каждом из которых распределенная нагрузка заменялась сосредоточенной силой, перемещение точек участков заменялось средней величиной. В этом случае семейство функций влияния дискретно по числу участков разбиения контактной линии и имеет вид K_{ij} (где i — номер точки приложения сосредоточенной силы, j — номер точки, в которой определяется перемещение).

Таким образом, перемещение в j-й точке под действием сосредоточенных по длине контактной линии сил имеет вид:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} P_i K_{ij}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n. \tag{1.7}$$

Располагая выражениями вида (7) для первого зуба

$$w_i' = \sum_{j=1}^{n} P_i K_{ij}'$$

и второго

$$w_i'' = \sum_{j=1}^{n} P_i K_{ij}'',$$

можно получить систему n алгебраических уравнений

$$w_i' + w_i'' = \sum_{j=1}^{n} P_i (K_{ij}' + K_{ij}'') = \Delta \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3 \ldots n \\ i = 1, 2, 3 \ldots n \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

что совместно с уравнением равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P \tag{1.9}$$

позволяет построить систему из $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными (n значений нагрузок P_i и сближение зубьев Δ).

Таким образом, после определения экспериментальным путем функции влияния $K(x, t)$ система интегральных уравнений (1.4) — (1.5) решалась в конечных разностях. Такой метод решения контактной задачи зубчатого зацепления позволяет с использованием ЭЦВМ находить как распределение нагрузки по длине контактной линии, так и сближение контактирующих зубьев. При этом, однако, необходимо знать длину контактной линии, которая при наличии начального перекоса зубьев является неизвестной величиной.

Кроме того, даже с использованием ЭЦВМ решение обратной контактной задачи зубчатого зацепления (т. е. определение контактной нагрузки) оказывается затруднительным из-за слабой обусловленности системы уравнений (1.8) — (1.9), что приводит к необходимости решения этой системы уравнений итерационными методами, задаваясь некоторой эпюрой контактной нагрузки.

В работе [90] система интегральных уравнений (1.4) — (1.5) решалась в предположении недеформируемости обода зубчатого колеса. При этом функция влияния $K(x,t)$ представлялась в виде суммы двух слагаемых, первое из которых учитывало контактную деформацию зубьев, а второе — изгибную деформацию зубьев

$$K(x, t) = K_k(x, t) + K_u(x, t). \tag{1.10}$$

Далее, предполагая, что нагрузка, приложенная в одной точке контактной линии, слабо влияет на контактную деформацию в других точках, уравнение (2) записывается в виде

$$w(x) = p(x) K_k(x) + \int_0^L K_u(x, t) p(t) dt. \tag{1.11}$$

В этом случае формула для сближения принимает вид

$$p(x)[K_{1k}(x) + K_{2k}(x)] + \int_0^L [K_{1u}(x, t) + K_{2u}(x, t)] p(t) dt = \Delta. \tag{1.12}$$

Коэффициент влияния $K_и(x,t)$, соответствующий изгибной деформации зубьев, в работе [90] определялся из решения задачи об изгибе тонкой консольной прямоугольной пластинки бесконечной длины с последующим учетом конечной длины пластинки экспериментальным путем.

Недостатками изложенного метода решения системы уравнений (1.4) — (1.5) являются использование результатов расчета и исследования тонких прямоугольных пластинок, что вызывает необходимость введения поправочных коэффициентов для учета реальных размеров зубьев зубчатых колес, а также приближенное решение уравнения (1.12) методом конечных разностей, не позволяющее получить решение в аналитическом виде.

В связи с этим возникает необходимость разработки метода решения контактной задачи зубчатого зацепления, который дал бы возможность получить выражения для искомых величин $p(t)$ и Δ в аналитической форме. Естественно, что такой метод может быть только приближенным. Однако таким путем можно довести результаты до конечных аналитических формул, которые позволят находить искомые величины $p(t)_{\max}$ и Δ.

Применительно к контактной задаче зубчатого зацепления необходимо учитывать то, что семейством плоскостей, параллельных торцевой плоскости зубчатого колеса, последнее может быть разбито на бесконечное число бесконечно тонких пластинок, каждая из которых представляет прямозубое зубчатое колесо, для которого имеется решение (гл. 1) о податливости при действии нагрузки в произвольной точке по высоте зуба. Поэтому приближенное решение контактной задачи косозубого зубчатого зацепления должно быть построено таким образом, чтобы в него составной частью входило решение о податливости прямозубого зубчатого зацепления (гл. 1).

В этом случае зуб зубчатого колеса представляется в виде набора не связанных друг с другом тонких пластинок, имеющих форму зуба, и поверхность зуба вдоль линии контакта представляет собой винклеровское основание с переменным коэффициентом постели. Другими словами, предполагается, что нормальные перемещения точки контактной линии с координатой l зависят только от нагрузки, действующей в этой точке, причем зависимость эта различна для точек контактной линии

$$w(l) = p(l)\,K(l), \tag{1.13}$$

где l — координата точки вдоль контактной линии, $K(l)$ — коэффициент постели, переменный по длине контактной линии.

В этом случае контактная задача зубчатого зацепления может быть решена следующим образом. Перемещения точек контактной линии первого и второго зуба согласно (13) запишутся в виде

$$w_1(l) = p(l)\,K_1(l), \qquad w_2(l) = p(l)\,K_2(l). \tag{1.14}$$

Кинематическое уравнение контакта зубьев примет вид

$$w_1(l) + w_2(l) = \Delta$$

или

$$p(l)\,[K_1(l) + K_2(l)] = \Delta. \tag{1.15}$$

Уравнение равновесия имеет прежний вид

$$\int_0^L p(l)\,dl = P. \tag{1.16}$$

Таким образом, система уравнений (1.15) и (1.16) полностью формулирует задачу при предположении (1.13) о поведении упругого основания.

При известных величинах коэффициентов постели $K_i(l)$ из (1.15) найдется закон распределения контактной нагрузки в зависимости от сближения зубьев

$$p(l) = \Delta/\Sigma K_i(l), \tag{1.17}$$

где

$$\Sigma K_i(l) = K_1(l) + K_2(l). \tag{1.18}$$

Подставив нагрузку $p(l)$ из (17) в уравнение равновесия (16), получим

$$\Delta \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)} = P, \tag{1.19}$$

откуда найдем выражение сближения зубьев Δ через внешнюю нагрузку

$$\Delta = P \Big/ \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}. \tag{1.20}$$

Наконец, подставив сближение зубьев Δ из (1.20) в (1.17), найдем закон распределения нагрузки по длине контактной линии в зависимости от внешней нагрузки

$$p(l) = P/\Sigma K_i(l) \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}. \tag{1.21}$$

Таким образом, задача о податливости зубчатого зацепления и распределении нагрузки по длине контактной линии будет решена, если удастся описать модель зуба в виде упругого основания, подчиняющегося гипотезе Винклера (1.13), однако имеющего переменный коэффициент постели по длине контактной линии. Ниже показано, как построить модель упругого основания, имитирующего деформирование зубчатого зацепления, если принять некотоную физическую гипотезу о характере упругого деформирования зуба зубчатого колеса.

§ 2. Модель упругого основания

При построении модели упругого основания, имитирующего деформирование зубьев зубчатых колес, предположим, что перемещения точек тела зуба вдоль оси зубчатого колеса равны нулю. Такое допущение позволяет значительно упростить контактную задачу зубчатого зацепления.

Поскольку при деформировании зуба зубчатого колеса перемещения точек контактной линии вдоль оси зубчатого колеса малы, то принятие гипотезы об отсутствии перемещений в этом направлении достаточно хорошо соответствует реальным условиям деформирования зубьев зубчатых колес. При принятой гипотезе тело зуба можно считать набранным из пластинок, имеющих форму поперечного сечения зуба и полученных рассечением тела зуба плоскостями, параллельными оси зубчатого колеса.

Пластинки связаны между собой касательными связями с модулем касательного сопротивления, равным GS (где G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения зуба). Каждая пластинка, в соответствии с принятой гипотезой, не искривляется, а деформируется только в своей плоскости.

Задача о деформации такой пластинки решена в гл. 1. Приведенные формулы позволяют определять упругое перемещение точки приложения нормальной удельной нагрузки в направлении ее действия. При этом отношение упругого перемещения $w_к$ к вызвавшей его удельной нормальной нагрузке $P_{уд}$ названо удельной податливостью прямого зуба (пластинки) δ. Величина удельной податливости зуба (пластинки) зависит только от расположения точки контакта на профиле его, т. е. является функцией координаты x (рис. 18).

Поскольку в каждой из пластинок, составляющих тело зуба, имеется только одна точка пересечения с контактной линией, то для пластинки, имеющей координату вдоль образующей зуба y, однозначно соответствует координата x, соответствующая точке пересечения ее контактной линией, т. е. точке, в которой приложена контактная нагрузка и для которой известна величина удельной податливости $\delta(x)$. Поскольку для решения контактной задачи зубчатого зацепления представляет интерес знание упругих перемещений только точек, расположенных на контактной линии, то каждую из выделенных пластинок можно рассматривать как набор стержней, не связанных между собой и опертых на жесткое основание, при этом стержни должны иметь такую длину l_c, и модуль упругости E_c, чтобы податливость их была равна δ_x.

Поперечные размеры стержней равны Δx и Δy, поэтому нормальные напряжения при сжатии стержней на величину $w(x)$ равны

$$\sigma = \varepsilon E$$

или

$$\frac{P}{\Delta x \Delta y} = \frac{w(x)}{l_c(x)} \cdot E_c(x), \qquad (2.1)$$

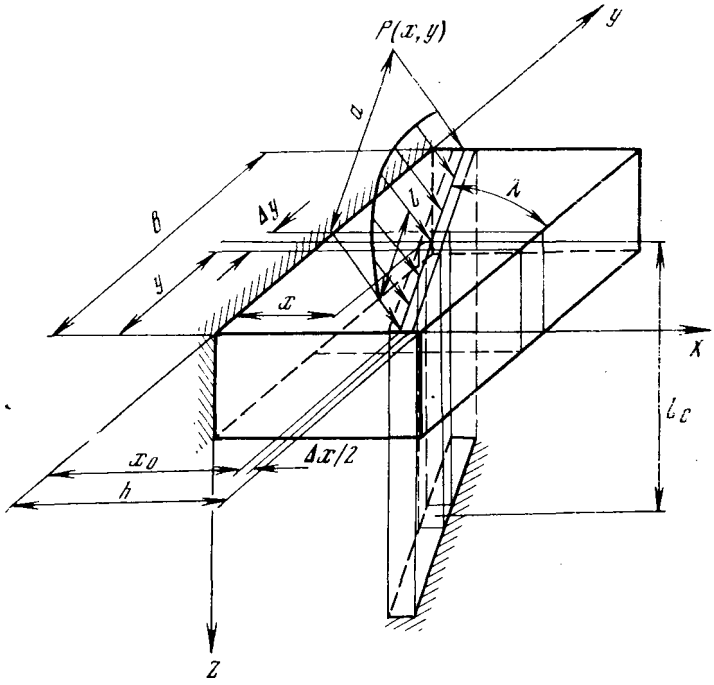


Рис. 18. Схема зуба зубчатого колеса

но

$$\frac{w(x)}{P/\Delta y} = \delta(x),$$

поэтому связь между длиной стержня с координатой x и его модулем упругости имеет вид

$$E_c(x) = l_c(x)/\delta(x)\,\Delta x. \qquad (2.2)$$

Таким образом, построенная модель состоит из стержней, имеющих длину $l_c(x)$ и модуль упругости $E_c(x)$, не связанных между собой в направлении x и связанных в направлении y касательными связями GS. Формула (2.2) включает два неизвестных E_c и l_c, поэтому для их определения примем, что напряжения сдвига между стержнями в направлении y равны напряжениям сдвига между пластинками, из которых набран зуб зубчатого колеса

$$G_c(x)\,l_c(x)\,\Delta x = GS, \qquad (2.3)$$

где S — площадь поперечного сечения зуба торцевой плоскостью

$$S \approx 2{,}25m\frac{\pi}{2}m = 3{,}85m^2,$$

G — модуль сдвига материала.

Принимая $G_c(x) = E_c(x)/2(1+\nu)$, с учетом (2.2) получим

$$l_c(x) = 1{,}96m\sqrt{E \cdot \delta(x)}. \tag{2.4}$$

Формула (4) позволяет определять длину стержня для любой точки контактной линии в зависимости от величины податливости пластинки, вырезанной в этой точке.

Таким образом, зубу зубчатого колеса поставлено в соответствие упругое основание, в одном направлении (параллельном оси x) имеющее свойство винклеровского основания с переменным коэффициентом постели, а в другом направлении (параллельном оси y) имеющее также свойство сопротивляться сдвиговым напряжениям.

Итак, задача сводится к определению перемещения точек приложения силы на границе пластинки, установленной на жесткое основание, и собранной из стержней, связанных касательными связями. Пластинка имеет единичную толщину, переменную высоту (2.4) и вырезана из зуба двумя плоскостями, параллельными контактной линии на поверхности зуба (рис. 18).

В работе [6] предложена следующая модель пластинки: она состоит из стержней, работающих только на сжатие и растяжение, но не на изгиб (напряжения по высоте сечения постоянны), и слоев между этими стержнями, связывающих их и работающих только на сдвиг. Если представить ортогональную (до деформации) сетку на пластинке, то после деформации линии $y = \text{const}$ искривятся, поэтому введение фиктивных массовых сил Y обеспечивает поведение пластинки в соответствии с принятой моделью. Принятая модель упругого основания имеет повышенную жесткость по сравнению с упругой средой, поскольку введение фиктивных массовых сил препятствует естественному деформированию упругой среды.

Введем новые координаты

$$\xi = y$$

$$\eta = \sqrt{\frac{G}{\lambda + 2G}} \cdot z, \tag{2.5}$$

тогда оно примет вид

$$\Delta w = -\frac{1}{G} \cdot z, \tag{2.6}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

оператор Лапласа.

Положив в (2.6) массовые силы по направлению оси z равными нулю, $z = 0$, получим, что

$$\Delta w = 0, \tag{2.7}$$

т. е. перемещения w являются гармонической функцией.

Тогда связь между перемещениями и напряжениями с учетом (2.5) примет вид

$$\sigma_\eta = \sqrt{G(\lambda + 2G)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad \tau_{\xi\eta} = G \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi}. \tag{2.8}$$

Подстановка в зависимости (2.6) — (2.9) значений модуля упругости E_c и длины l_c стержней из (2.2) и (2.4) даст следующий результат:

$$\Delta w = 0, \qquad y = \xi, \quad z\sqrt{(1-\nu)/2(2-\nu)} = \eta, \tag{2.9}$$

$$\sigma_\eta = G_c \sqrt{\frac{2(2-\nu)}{(1-\nu)}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad \tau_{\xi\eta} = G_c \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi}, \tag{2.10}$$

где G_c — модуль сдвига материала стержня с учетом принятой модели (2)

$$G_c(\xi) = \frac{E_c(\xi)}{2(1+\nu)} = 0{,}75\,\frac{m}{\Delta x}\sqrt{E/\delta(\xi)}, \tag{2.11}$$

E — модуль упругости материала зубчатого колеса; Δx — единичная толщина пластинки.

Задача формулируется следующим образом: необходимо найти гармоническую функцию $w(\xi, \eta)$, которая бы удовлетворяла граничным условиям:

$$w = 0 \text{ при } \eta = 0, \tag{2.12}$$

$$\partial w/\partial \xi = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = a, \tag{2.13}$$

где a — длина пластинки,

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{1}{G_c}\sqrt{\frac{(1-\nu)}{2(2-\nu)}} \cdot \frac{P(\xi)}{\Delta x \cdot \Delta \xi} \quad \text{при } \eta = l_c(\xi). \tag{2.14}$$

Условие (12) соответствует отсутствию перемещений w на границе пластинки с жестким основанием; условие (2.13) — отсутствию напряжений сдвига на свободных торцах пластинки, а (2.14) — равенству напряжений на нагруженной границе пластинки внешней нагрузке (отнесенное к единице площади), распределенной по контактной линии.

Будем искать перемещение $w(\xi, \eta)$ в виде гармонической функции

$$w(\xi, \eta) = A_0\eta + \Sigma A_n \operatorname{sh} \cdot \frac{\pi n}{a}\eta \cos\frac{\pi n}{a}\xi, \tag{2.15}$$

которая удовлетворяет граничным условиям (2.12) и (2.13). Подставив выражение (2.15) в (2.14) и разлагая нагрузку $P(\xi)$ в ряд Фурье, получим, что коэффициенты A_i, входящие в (15), следую-

щим образом выражаются через контактную нагрузку

$$A_0 = \frac{1}{aG_c}\sqrt{(1-\nu)/2(2-\nu)}\int_0^a p(t)\,dt, \tag{2.16}$$

$$A_n = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{\frac{\pi n}{a}\cdot \mathrm{ch}\cdot\frac{\pi n}{a}l_c}\int_0^a p(t)\cos\frac{\pi n}{a}t\,dt. \tag{2.17}$$

Так как при решении задачи необходимо знать перемещения точек контактной линии, т. е. границы пластинки, то в формулах (2.15) — (2.17) можно положить $\eta = l_c$, тогда

$$w(\xi, l_c) = \frac{\delta(\xi)}{a}k_\nu\left[\int_0^a p(t)\,dt + 2\Sigma\frac{\mathrm{th}\,\theta_n}{\theta_n}\left(\int_0^a p(t)\cos\frac{\pi n}{a}t\,dt\right)\cos\frac{\pi n}{a}\xi\right], \tag{2.18}$$

где

$$\theta_n = 1{,}96\cdot\frac{\pi n}{a/m}\sqrt{E\delta(\xi)}, \tag{2.19}$$

$$\frac{l_c}{\delta(\xi)} = 1{,}96m\sqrt{E/\delta(\xi)}, \tag{2.20}$$

$$K_\nu = 2(1+\nu)\sqrt{(1-\nu)/2(2-\nu)}$$

при $\nu = 0{,}3$; $K_\nu = 1{,}18$.

Ширина площадки контакта зубьев значительно меньше длины контактной линии. Поэтому в соответствии с теоремой о среднем при нахождении определенных интегралов, входящих в (2.18), будем считать нагрузку равномерно распределенной на небольшом участке ширины 2γ, измеренной вдоль оси ξ. Нагрузка отлична от нуля только на полоске шириной 2γ, поэтому, принимая середину полоски находящейся в точке с координатой «c», из (2.19) получим

$$w(\xi) = 1{,}18\frac{\delta(\xi)}{a}P\left[1 + 2\Sigma\frac{\mathrm{th}\,\theta_n}{\theta_n}\cos\frac{\pi n}{a}\frac{\sin\frac{\pi n}{a}\gamma}{\frac{\pi n}{a}\gamma}\cos\frac{\pi n}{a}\xi\right]. \tag{2.21}$$

Определив это выражение на участке $[c-\gamma,\ c+\gamma]$ из (2.21), получим

$$w(\xi, c) = 1{,}18\frac{\delta(\xi)}{a}P(\xi, c)\left[1 + 2\Sigma\frac{\mathrm{th}\,\theta_n}{\theta_n}\cos^2\frac{\pi n}{a}c\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{a}\gamma}{\frac{\pi n}{a}\cdot\gamma}\right)^2\right] \tag{2.22}$$

Так как ряд, входящий в (2.22), сходится со скоростью $1/n^3$, то можно ограничиться только первым членом ряда, положив в (2.22) $n = 1$. Учитывая малость величины γ в (2.22), можно положить

$$\sin \frac{\pi n}{a} \gamma \Big/ \frac{\pi n}{a} \gamma \approx 1.$$

Тогда

$$w(\xi, c) = 1{,}18 \frac{\delta(\xi)}{a} P(\xi, c) \left[1 + 2 \frac{\operatorname{th} \theta_1}{\theta_1} \cos^2 \pi \left(\frac{c}{a}\right)\right], \qquad (2.23)$$

где

$$\theta_1 = \frac{1{,}96\pi}{a/m} \sqrt{E \cdot \delta(\xi)}.$$

Из формулы (2.23) можно найти переменную величину коэффициента постели упругого основания, моделирующего деформирование зуба зубчатого колеса, выраженную через податливость прямозубого зацепления при приложении нагрузки в соответствующей точке высоты зуба

$$K(l) = \frac{w(\xi, c)}{P(\xi, c)} = \frac{1{,}18\delta(\xi)}{a} \left[1 + 2 \frac{\operatorname{th} \theta_1}{\theta_1} \cos^2 \pi \left(\frac{c}{a}\right)\right]. \qquad (2.24)$$

Построенная здесь модель упругого основания была применена в работе [6] для решения ряда задач по расчету балок на упругом основании. Сопоставление результатов приближенного расчета с использованием модели упругого основания с классическими решениями показало хорошее совпадение их. Поскольку использование модели упругого основания позволяет получать решение в аналитическом виде, то ее целесообразно применять при решении различных инженерных задач.

§ 3. Деформация косого зуба

Определим, в первую очередь, деформацию косых зубьев в случае начального плотного касания зубьев по всей длине контактной линии, т. е. в случае отсутствия технологических перекосов и упругих деформаций элементов зубчатой передачи, приводящих к размыканию контакта зубьев. Формулы (3.1) и (3.2) позволяют определить сближение зубьев Δ и распределение нагрузки $p(l)$ по длине контактной линии

$$\Delta = P \Big/ \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}, \qquad (3.1)$$

$$p(l) = P/\Sigma K_i(l) \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}. \qquad (3.2)$$

Построенная в предыдущем параграфе модель упругого основания позволяет определять переменный по длине контактной линии коэффициент постели, входящий в эти формулы,

$$K(l) = 1{,}18\frac{\delta(l)}{a}\left[1 + 2\frac{\operatorname{th}\theta_1}{\theta_1}\cos^2\pi\left(\frac{l}{a}\right)\right], \tag{3.3}$$

где l — координата рассматриваемой точки контактной линии, измеренная вдоль ее длины; a — длина контактной линии; l_c — эффективная длина стержня, имеющего податливость $\delta(l)$; θ_1 — параметрический угол, зависящий от податливости зуба в рассматриваемой точке и относительной (в долях модуля) длины контактной линии

$$\theta_1 = \frac{1{,}96\pi}{a/m}\sqrt{E\delta(l)}. \tag{3.4}$$

Переходя к системе координат xoy, расположенной на боковой поверхности зуба, из (3.3) получим величины коэффициента постели для точки контактной линии с координатами x, y, соответственно, для первого и второго зуба

$$K_1(l) = 1{,}18\frac{\delta_1(x_1)}{a}\left[1 + K_\theta\cos^2\pi\left(\frac{y_1}{a\cos\lambda}\right)\right], \tag{3.5}$$

$$K_2(l) = 1{,}18\frac{\delta_2(x_2)}{a}\left[1 + K_\theta\cos^2\pi\left(\frac{y_2}{a\cos\lambda}\right)\right], \tag{3.6}$$

где

$$K_\theta = 2\frac{\operatorname{th}\theta_1}{\theta_1}, \tag{3.7}$$

λ — угол наклона контактной линии по отношению к образующей зуба

$$\operatorname{tg}\lambda = \sin\alpha_n\operatorname{tg}\beta_0, \tag{3.8}$$

β_0 — угол наклона зубьев по основному цилиндру, $a\cos\lambda$ — проекция контактной линии на образующую зуба.

Координаты рассматриваемой точки контактной линии на первом и втором зубе связаны следующей зависимостью:

$$x_2 = h - x_1, \qquad y_2 = b - y_1, \tag{3.9}$$

где h — эффективная высота зуба, $h \approx 2m$, b — длина зуба.

Поэтому формулы (3.2) примут вид

$$K_1(l) = 1{,}18\frac{\delta_1(x_1)}{a}\left[1 + K_\theta\cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right], \tag{3.10}$$

$$K_2(l) = 1{,}18\frac{\delta_2(x_2)}{a}\left[1 + K_\theta\cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right],$$

и суммарный коэффициент постели, входящий в формулы (3.1) и

(3.2), запишется в виде

$$\Sigma K_i(l) = 1{,}18\,\frac{\delta_\Sigma(x)}{a}\left[1 + K_\theta \cos^2 \pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right], \qquad (3.11)$$

где $\delta_\Sigma(x) = \delta_1(x) + \delta_2(h - x)$ — податливость пары зубьев в точке контактной линии с координатой x, y.

В зависимости от фазы зацепления зубьев контактная линия может располагаться в трех зонах поверхности зуба (рис. 19). В зонах *1* и *3*, соответствующих входу и выходу контактной линии с поверхности зуба, длина контактной линии зависит от фазы зацепления зубьев и изменяется при движении по поверхности зуба. В зоне *2* длина контактной линии не зависит от фазы зацепления зубьев.

В зависимости от геометрических параметров зубьев (модуль, длина зуба, угол наклона зубьев) во второй зоне контактная линия может располагаться по всей длине или по всей высоте зуба. На зубе ведущего колеса контактная линия вступает на поверхность зуба в зону *1*, т. е. на ножку зуба, на зубе ведомого колеса контактная линия вступает на поверхность зуба в зону *3*, т. е. на голову зуба. Таким образом, при контакте двух зубьев линия зоны *1* одного колеса совпадает с соответствующей линией зоны *3* другого колеса.

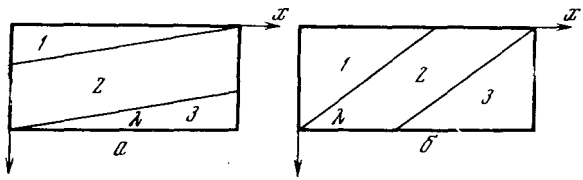


Рис. 19. Положение контактной линии на поверхности зуба

Координаты точки линии контакта связаны следующей зависимостью

$$y = (x_0 - x)/\mathrm{tg}\,\lambda, \qquad (3.12)$$

где x_0 — координата точки пересечения контактной линией торца зуба, зависящая от геометрических параметров зуба и фазы зацепления зубчатых колес.

Отсюда имеем $dl = dy/\cos\lambda$. (3.13)

Подставляя (3.11) в (1.20), получим для зоны *1*

$$P = \frac{a\Delta_1}{1{,}18\cos\lambda}\int_0^{\frac{x_0}{\mathrm{tg}\,\lambda}} \frac{dy}{\delta_\Sigma(x)\left[1 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]},$$

$$0 \leqslant x_0 \leqslant b\,\mathrm{tg}\,\lambda, \qquad (3.14)$$

для зоны *2*

$$P = \frac{a\Delta_2}{1{,}18\cos\lambda}\int\limits_0^b \frac{dy}{\delta_\Sigma(x)\left[1 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]},$$

$$b\,\mathrm{tg}\,\lambda \leqslant x_0 \leqslant h, \tag{3.15}$$

для зоны *3*

$$P = \frac{a\Delta_3}{1{,}18\cos\lambda}\int\limits_{\frac{x_0-h}{\mathrm{tg}\,\lambda}}^b \frac{dy}{\delta_\Sigma(x)\left[1 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]},$$

$$h \leqslant x_0 \leqslant h + b\,\mathrm{tg}\,\lambda. \tag{3.16}$$

Исходя из симметрии подынтегральной функции относительно средней точки поверхности зуба ($h/2$, $a/2$), получаем, что

$$\int\limits_0^{\frac{x_0}{\mathrm{tg}\,\lambda}} \frac{dy}{\delta_\Sigma(x)\left[1 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]} = \int\limits_{\frac{x_0-h}{\mathrm{tg}\,\lambda}}^b \frac{dy}{\delta_\Sigma(x)\left[1 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]}. \tag{3.17}$$

Формула (17) справедлива в предположении, что суммарная податливость пары контактирующих зубьев $\delta(x)$ симметрична относительно полюса зацепления. Поскольку в гл. 1 показано, что податливость прямых зубьев слабо зависит от числа зубьев зубчатых колес, то принятое допущение вполне оправдано при числах зубьев зубчатых колес, $z > 50$.

Формулы (3.14) — (3.16) справедливы только для коротких зубьев, у которых контактная линия во второй зоне располагается не по всей высоте зуба, а по всей длине его (см. рис. 19). Для длинных зубьев пределы интегрирования и пределы изменения координаты по зонам изменяются. Формулы (3.14) — (3.16) для длинных зубьев запишутся в виде:

для зоны *1*

$$P = \frac{a\Delta_1}{1{,}18\cos\lambda}\int\limits_0^{x_0/\mathrm{tg}\,\lambda} F(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant h, \tag{3.18}$$

для зоны *2*

$$P = \frac{a\Delta_2}{1{,}18\cos\lambda}\int\limits_{\frac{x_0-h}{\mathrm{tg}\,\lambda}}^{x_0/\mathrm{tg}\,\lambda} F(y)\,dy, \quad h \leqslant x_0 \leqslant b\,\mathrm{tg}\,\lambda, \tag{3.19}$$

для зоны *3*

$$P = \frac{a\Delta_3}{1{,}18\cos\lambda}\int\limits_{\frac{x_0-h}{\mathrm{tg}\,\lambda}}^{b} F(y)\,dy, \quad b\,\mathrm{tg}\,\lambda \leqslant x_0 \leqslant h + b\,\mathrm{tg}\,\lambda, \tag{3.20}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\delta_\Sigma(x)\,[1 + K_\theta \cos^2(y/a\cos\lambda)]}.$$

Условием выхода контактной линии на всю высоту зуба является равенство $b = h/\mathrm{tg}\,\lambda$, следовательно, при $b > h/\mathrm{tg}\,\lambda$ зубья длинные, а при $b < h/\mathrm{tg}\,\lambda$ — короткие.

Жесткость пары косых зубьев при однопарном зацеплении определится из (14) — (17) в виде:

для зоны *2*

$$C_\beta = \frac{P}{b\Delta_2} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1{,}18\cos\lambda}\int_0^b \frac{C_\Sigma(x)\,dy}{\left[1{,}18 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]}, \quad (3.21)$$

для зоны *1* и *3*

$$C_\beta = \frac{P}{b\Delta_i} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1{,}18\cos\lambda}\int_0^{\frac{x_0}{\mathrm{tg}\,\lambda}} \frac{C_\Sigma(x)\,dy}{\left[1{,}18 + K_\theta\cos^2\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]}, \quad (3.22)$$

где $C_\Sigma(x)$ — суммарная жесткость прямозубого зубчатого зацепления в точке с координатой x, определяемая из формулы (12), b — длина косого зуба.

Таким образом, для решения задачи о деформации косых зубьев необходимо располагать зависимостью $C_\Sigma(x)$ изменения жесткости прямых зубьев по фазе зацепления (т. е. координаты точки контакта по высоте зубьев).

Аналитическая форма записи зависимости жесткости пары прямых зубьев от фазы зацепления может быть выбрана произвольно, поскольку возрастание к полюсу зацепления может быть описано различными законами. Например, можно принять параболический закон изменения жесткости по фазе зацепления. Однако в формулы (3.21) и (3.22) входит тригонометрическая функция от относительной координаты точки, поэтому примем зависимость жесткости прямых зубьев от фазы зацепления в тригонометрическом виде

$$C_n = C_0\left[1 + \frac{C_p - C_0}{C_0}\cdot\sin\pi\frac{x}{h}\right]. \quad (3.23)$$

Принимая $C_0 = 1{,}153\cdot10^5$ *кГ/см*^{2} и $C_p = 1{,}915\cdot10^5$ *кГ/см*^{2}, получим

$$C_n = 1{,}153\cdot10^5\left[1 + 0{,}66\cdot\sin\pi\frac{x}{h}\right], \quad (3.24)$$

где h — активная часть высоты зуба (отсчитывается от начальной точки контакта), x — расстояние рассматриваемой точки профиля зуба от начальной точки контакта зубьев.

На рис. 17 нанесены расчетные значения жесткости пары прямых зубьев и показана зависимость $C_n = f(x/h)$, построенная по формуле (3.24). Как видно из приведенных данных, функция (3.24) достаточно хорошо аппроксимирует расчетные значения жесткости $C_n = f(x/h)$.

Подстановка значения C_n из (3.23) в (3.21) и (3.22) дает зависимости для определения жесткости пары косых зубьев для зоны *2*

$$C_\beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{C_0}{1{,}18 \cos\lambda} \int_0^b \frac{\left[1 + K_c \sin\pi\left(\frac{x}{h}\right)\right]}{\left[1 + K_\theta \cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]} dy, \qquad (3.25)$$

для зон *1* и *3*

$$C_\beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{C_0}{1{,}18 \cos\lambda} \int_0^{\frac{x_0}{\operatorname{tg}\lambda}} \frac{\left[1 + K_c \sin\pi\left(\frac{x}{h}\right)\right]}{\left[1 + K_\theta \cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)\right]} dy, \qquad (3.26)$$

где $K_c = (C_n - C_0)/C_0 \approx 0{,}66$.

Входящая в формулы (3.25) и (3.26) абсцисса точки контактной линии x связана с ординатой y зависимостью (3.12)

$$x = x_0 - y \operatorname{tg}\lambda. \qquad (3.27)$$

Интегралы, входящие в выражения (3.25) и (3.26), не могут быть выражены в элементарных функциях. Поэтому для их приближенного определения воспользуемся обобщенной теоремой о среднем, согласно которой, при некоторых условиях, которым удовлетворяют рассматриваемые функции, справедливо равенство

$$\int_0^{a\cos\lambda} \frac{1 + K_c \sin[(x_0 - y\operatorname{tg}\lambda)/h]}{1 + K_\theta \cos^2\pi(y/a\cos\lambda)} dy = \qquad (3.28)$$

$$= [1 + K_c \sin\pi[(x_0 - y^* \operatorname{tg}\lambda)/h]] \int_0^{a\cos\lambda} \frac{dy}{1 + K_\theta \cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)},$$

где

$$0 \leqslant y^* \leqslant a\cos\lambda \text{ для зоны } 1 \text{ и } 3$$

и

$$0 \leqslant y^* \leqslant b \text{ для зоны } 2.$$

Интеграл

$$Y = \int \frac{dy}{1 + K_\theta \cos^2\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)} =$$

$$= a\cos\lambda \left[\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{1+K_\theta}}\operatorname{tg}\pi\left(\frac{y}{a\cos\lambda}\right)}{\sqrt{K_\theta(1+K_\theta)}}\right]. \qquad (3.29)$$

Независимо от расположения контактной линии на боковой поверхности зуба, подынтегральная функция интеграла Y симметрична относительно средней точки контактной линии. Поэтому для всех зон поверхности коротких и длинных зубьев

$$Y = \pi a \cos\lambda / \sqrt{K_\theta (1 + K_\theta)}. \tag{3.30}$$

Эта зависимость справедлива, если принять, что K_θ не зависит от положения точки контакта на поверхности зуба. Поскольку K_θ слабо зависит от θ, то это допущение не приводит к значительной погрешности в определении интеграла Y.

Таким образом,

$$C_\beta = \frac{C_0}{1{,}18} \cdot \frac{a}{b} \frac{1 + K_c \sin \pi \left(\frac{x^*}{h}\right) \pi}{\sqrt{K_\theta (1 + K_\theta)}}. \tag{3.31}$$

Координата точки x^*, для которой справедливо равенство (28), неизвестна, однако известно, что функция C_n (3.16) претерпевает наибольшее изменение в случае длинных зубьев в зоне *2*, когда контактная линия распространяется по всей высоте зуба. В других зонах эта функция изменяется по длине контактной линии в меньшей степени. Поэтому примем, что равенство (3.28) справедливо, когда в него входит средняя величина функции C_n (3.24) по длине контактной линии. С учетом этого жесткость пары косых зубьев при однопарном зацеплении в произвольной фазе зацепления может быть определена по формуле

$$C_\beta = \frac{C_0}{1{,}18} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{K_\theta (1 + K_\theta)}} \cdot K_x, \tag{3.32}$$

где коэффициент K_x зависит от положения контактной линии на поверхности зуба.

Для зон *1* и *3* как коротких ($b < h/\mathrm{tg}\,\lambda$), так и длинных ($b > h/\mathrm{tg}\,\lambda$) зубьев

$$K_x = \frac{x_0}{b \sin\lambda} \left\{1 + \frac{K_c}{\pi} \cdot \frac{h}{x_0} \left[1 - \cos \pi \left(\frac{x_0}{h}\right)\right]\right\}, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant b\,\mathrm{tg}\,\lambda \tag{3.33}$$

для зоны *2* коротких зубьев, когда контактная линия распространяется по всей длине зубьев,

$$K_x = \frac{1}{\cos\lambda} \left\{1 + \frac{K_c}{\pi} \cdot \frac{h}{b\,\mathrm{tg}\,\lambda} \left[\cos \pi \frac{x_0 - b\,\mathrm{tg}\,\lambda}{h}\right) - \cos \pi \left(\frac{x_0}{h}\right)\right]\right\}$$

$$b\,\mathrm{tg}\,\lambda \leqslant x_0 \leqslant h \tag{3.34}$$

для зоны *2* длинных зубьев, когда контактная линия распространяется по всей высоте зубьев

$$K_x = \frac{h}{b \sin\lambda} \left(1 + \frac{2}{\pi} K_c\right), \quad h \leqslant x_0 \leqslant b\,\mathrm{tg}\,\lambda. \tag{3.35}$$

Как следует из формулы (3.33) в момент входа и выхода контактной линии с поверхности зуба жесткость пары зубьев обращается в нуль. Поскольку в этот момент и нагрузка на зубьях равна нулю, то перемещения в этих точках будут конечными. Формальное обращение в нуль жесткости зубьев в этих точках объясняется тем, что контактная линия в них обращается в точку. Поскольку приведенный вывод предполагает конечные размеры длины контактной линии, то предельный переход в (3.33) при $x_0 = 0$ недопустим.

Формулы (3.32) — (3.35) позволяют определять зависимость жесткости косых зубьев от фазы зацепления как при однопарном, так и при многопарном зацеплении зубьев. Из формул (3.33) и (3.34) видно, что жесткость пары коротких зубьев плавно увеличивается, достигая максимального значения в средней точке зоны *2* поверхности зуба при $x_0 = {}^1/_2\,(h - b \operatorname{tg} \lambda)$; жесткость пары длинных зубьев плавно увеличивается в зоне *1*, достигая максимального значения при вступлении контактной линии в зону *2* поверхности зуба $x_0 = {}^1/_2\,(b \operatorname{tg} \lambda - h)$, при этом при перемещении контактной линии в зоне *2* жесткость пары зубьев остается постоянной.

Полученная зависимость для жесткости пары косых зубьев позволяет найти из (1.21) распределение нагрузки по длине контактной линии в виде

$$p(x, y) = \frac{P}{b} \cdot \frac{\sqrt{K_\theta (1 + K_\theta)}}{\pi K_x} \cdot \left[\frac{1 + K_c \sin \pi \left(\frac{x}{h}\right)}{1 + K_\theta \cos^2 \pi \left(\frac{y}{a \cos \lambda}\right)} \right]. \quad (3.36)$$

Первый сомножитель определяет среднюю величину нагрузки на контактной линии, второй сомножитель характеризует положение контактной линии на поверхности зуба, а третий сомножитель определяет положение рассматриваемой точки на контактной линии.

В приведенном расчете учитывалось влияние только деформации зубьев на жесткость зацепления и распределение нагрузки по длине контактной линии. Между тем на условия контактирования зубьев влияют также деформации изгиба и кручения ободьев зубчатых колес, деформации валов и опор передачи, погрешности изготовления и монтажа зубчатых колес. Для учета указанных факторов примем одно допущение, которое значительно упростит анализ, не приводя к значительным погрешностям в результатах расчета.

Будем считать, что на упругие деформации ободьев зубчатых колес, валов и опор передачи влияют только средние нагрузки в зубчатом зацеплении P/b, распределение же их по длине контактной линии влияет только на деформацию зубьев. По существу это допущение соответствует принятию принципа Сен-Венана при определении деформации указанных элементов зубчатой передачи. В данном случае принятие принципа Сен-Венана к зубчатой пере-

даче позволяет учитывать указанные факторы только при составлении кинематических уравнений контакта зубьев, что значительно упрощает решение задачи.

Перемещение точки контакта, обусловленное указанными факторами, выразится в виде

$$w(l) = w_з(l) + w_и(l) + w_к(l), \tag{3.37}$$

где $w_з(l)$ — перемещение точки, обусловленное деформацией зуба, $w_з(l) = K(l)P(l)$, $w_и(l)$ — перемещение точки, обусловленное изгибной деформацией валов зубчатой передачи, $w_и(l) = K_и P/b$, $w_к(l)$ — перемещение точки, обусловленное крутильной деформацией обода зубчатого колеса, $w_к(l) = K_к P/b$.

Технологический перекос осей зубчатых колес, так же как и упругий перекос осей, обусловленный различной податливостью опор зубчатых колес, учтем при составлении кинематических уравнений контакта зубьев

$$w_1(l) + w_2(l) = \Delta + \gamma l, \tag{3.38}$$

где $\gamma = \gamma_т + \gamma_у$ — суммарный угол перекоса образующих зубьев, $\gamma_т$ — определяется погрешностями монтажа зубчатых колес. $\gamma_у = K_\gamma \cdot P/b$ — определяется податливостью опор зубчатых колес,

Изгибная деформация валов зубчатых колес приближенно может быть аппроксимирована параболой

$$w_и(l) \approx (a_и l^2 + b_и l) \cdot \frac{P}{b}, \tag{3.39}$$

деформация кручения (так же как и изгиба) ободьев зубчатых колес приближенно может быть аппроксимирована линейной зависимостью

$$w_к(l) \approx c_k l \cdot \frac{P}{b}. \tag{3.40}$$

Коэффициенты a, b и c могут быть определены для данной передачи методами сопротивления материалов. Тогда уравнение (3.38) примет вид

$$p(l)\,[K_1(l) + K_2(l)] = \Delta + (\gamma - B)\,l - Al^2, \tag{3.41}$$

где

$$B = (b_{и_1} + b_{и_2} + c_{k_1} + c_{k_2})\,\frac{P}{b}, \qquad A = (a_{и_1} + a_{и_2}) \cdot \frac{P}{b}.$$

Из (3.2) определяется распределение нагрузки по длине контактной линии

$$p(l) = \frac{\Delta}{\Sigma K_i(l)} + \frac{(\gamma - B)\,l}{\Sigma K_i(l)} - \frac{Al^2}{\Sigma K_i(l)}. \tag{3.42}$$

Интегрируя (3.42) по длине контактной линии L, получим

$$P = \int_0^L p(l)\,dl = \Delta \int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)} + (\gamma - B) \int_0^L \frac{l\,dl}{\Sigma K_i(l)} - A \int_0^L \frac{l^2 dl}{\Sigma K_i(l)}, \qquad (3.43)$$

где L — неизвестная в общем случае длина контактной линии.

Поскольку рассматривается случай, когда длина контактной линии не равна расчетной величине a, то определим L из условия равенства нулю нагрузки $p(L)$ в этой точке. Тогда из (3.42) имеем

$$\Delta + (\gamma - B)L - AL^2 = 0. \qquad (3.44)$$

Подстановка выражения для сближения зубьев из (3.44) в (3.43) позволяет получить зависимость для определения длины контактной линии L

$$P = A \int_0^L \frac{(l^2 - L^2)}{\Sigma K_i(l)}\,dl + (\gamma - B) \int_0^L \frac{(l - L)\,dl}{\Sigma K_i(l)}. \qquad (3.45)$$

Определив отсюда L и подставив в (3.44), найдем сближение и жесткость пары зубьев. Подставив найденное таким образом сближение зубьев из (3.44) в (3.42), можно найти распределение нагрузки по длине контактной линии. Таким образом, может быть решена контактная задача зубчатого зацепления с учетом деформации и погрешностей изготовления и монтажа элементов зубчатой передачи.

Рассмотрим два частных примера, иллюстрирующих предложенный метод расчета зубчатого зацепления [9]. Во-первых, будем считать, что деформации элементов зубчатой передачи отсутствуют, однако учтем перекос между образующими зубьев γ. В этом случае длина контактной линии неизвестна, поэтому, полагая в формуле (3.43) $A = B = 0$, а также принимая, что влияние угла перекоса осей на сближение зубьев незначительно, получим зависимость для сближения зубьев

$$\Delta = \frac{P}{\int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}}. \qquad (3.46)$$

С учетом (46) условие (44) примет вид

$$\frac{P}{\int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}} + \gamma L = 0, \qquad (3.47)$$

откуда может быть найдена длина контактной линии L. Распределение нагрузки по длине контактной линии определится из

формулы (3.42)

$$p(l) = \frac{\Delta}{\Sigma K_i(l)} + \frac{\gamma l}{\Sigma K_i(l)} . \qquad (3.48)$$

Таким образом решается контактная задача зубчатого зацепления при наличии перекоса осей зубчатых колес.

Во-вторых, будем считать, что перекос осей отсутствует, однако учтем деформацию ободьев и опор зубчатых колес. В этом случае длина контактной линии известна и равна a, поэтому, полагая в формуле (43) $\gamma = 0$ и интегрируя, найдем выражение для сближения зубьев

$$\Delta = \left[P + B\int_0^a \frac{l dl}{\Sigma K_i(l)} + A\int_0^a \frac{l^2 dl}{\Sigma K_i(l)}\right] \frac{1}{\int_0^L \frac{dl}{\Sigma K_i(l)}} . \qquad (3.49)$$

Подставляя сближение зубьев из (49) в (42), найдем распределение нагрузки по длине контактной линии, т. е. решим контактную задачу зубчатого зацепления с учетом упругой деформации элементов зубчатой передачи.

§ 4. Экспериментальные исследования деформации косых зубьев

Сложность задачи теоретического определения деформации косых зубьев привела к развитию экспериментальных методов решения этой задачи. Экспериментальные исследования деформации косых зубьев могут быть разделены на три группы, в каждой из которых исследованию подвергались объекты различной сложности.

К первой группе исследований отнесем работы, в которых деформация косых зубьев определялась на моделях зубьев зубчатых колес. В одной из первых работ этой группы [88] изучалась деформация модели зуба-рейки, относительные размеры которой соответствовали относительным размерам зубьев зубчатых колес. При испытаниях в шести точках предполагаемой контактной линии последовательно прикладывались сосредоточенные нагрузки и при этом измерялись упругие перемещения в каждой из шести точек. Полученные коэффициенты влияния использовались для определения сближения зубьев при равномерном распределении нагрузки по длине контактной линии. Поскольку наклон контактной линии на поверхности зуба однозначно определяется углом наклона зубьев на основной окружности (3.8), то последний имитировался изменением наклона контактной линии по отношению к образующей зуба. Таким образом, было оценено влияние зубьев на жесткость зубьев косозубых зубчатых колес.

Дальнейшее развитие этот метод нашел в работах [106, 34, 91, 104]. Исследования в основном выполнялись на тонких плас-

тинках, моделирующих зуб зубчатого колеса. Эта группа работ позволила получить данные о деформации собственно зубьев зубчатых колес при произвольном распределении нагрузки по длине контактной линии. Однако таким методом не удается оценить влияние конструкции обода зубчатого колеса на деформацию зубчатого зацепления.

Ко второй группе исследований отнесем работы, в которых определялась деформация пары зубчатых колес с использованием статического и резонансного методов исследования.

При статическом методе определялись упругие перемещения зубчатых колес и по ним судили о деформации зубьев [80]. Сложность задачи в данном случае заключалась в том, что косозубое колесо при пространственном характере приложения сил в зацеплении зубьев получает некоторое смещение, ориентированное некоторым образом относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осями зубчатых колес. Это привело к тому, что расположенные в торцевой плоскости индикаторы перемещений регистрировали лишь проекцию указанного перемещения зубчатых колес на торцевую плоскость, что искажало результаты определения деформации косых зубьев.

При резонансном методе вибратором направленного действия под нагрузкой возбуждались колебания и по резонансной частоте колебаний зубчатых колес на жесткости зубчатого зацепления определялась искомая деформация зубьев [75]. Таким путем оценено влияние угла наклона зубьев на жесткость косозубого зубчатого зацепления.

К третьей группе исследований относятся работы, в которых определялась деформация зубьев на реальной зубчатой передачи в процессе ее работы. Оригинальный метод исследования деформации прямых и косых зубьев был применен в работе [105]. Испытывались фланкированные зубчатые колеса с различной глубиной фланка. Рабочие поверхности зубьев перед испытаниями покрывали тонким слоем смазки, которая стиралась во время работы передачи по мере увеличения нагрузки. На фланкированных участках боковой поверхности зубьев краска оставалась, причем ширина оставшейся полоски краски определялась упругой деформацией зубьев. Нагрузка увеличивалась до тех пор, пока не исчезала полоска краски на всем фланкированном участке поверхности зуба.

Резонансный метод был применен при исследовании судового редуктора ГТЗА [26]. На основании сопоставления результатов расчета собственных частот и форм колебаний с данными эксперимента определялось уточненное значение жесткости зубчатого зацепления. По-видимому, оценка деформации зубьев по результатам исследования сложного зубчатого механизма может быть сделана лишь ориентировочно, поскольку большое число вспомогательных факторов может снизить точность определения деформации зубьев. Результаты исследования деформации зубчатых зацепле-

ний в значительной степени зависят от конструкции всего механизма, поэтому для устранения большого числа дополнительных факторов представляется целесообразным проводить испытания на зубчатых парах.

Применительно к косозубому зацеплению статический метод вызывает возражения, поскольку в связи с пространственным характером действующих на зубчатые колеса сил в зацеплении, в общем случае следует определять все шесть компонент упругих перемещений зубчатых колес, обусловленных деформативностью зубчатого зацепления.

Резонансный метод вызывает возражения, так как вследствие пространственного характера действующих на зубчатые колеса сил в зацеплении и отсутствия геометрической симметрии зубчатых колес в общем случае будет иметь место статическая и динамическая взаимосвязанность обобщенных перемещений зубчатых колес. Это обстоятельство вызывает необходимость отработки системы координирования жесткого тела в пространстве с помощью пьезодатчиков.

Выбор метода исследования деформативности зубчатых зацеплений определяется ожидаемой величиной упругой деформации зубьев. Если упругая деформация зубьев невелика, то следует отдать предпочтение резонансному методу, поскольку точность статического метода будет в этом случае значительно ниже. Напротив, если упругая деформация зубьев ожидается значительной, то следует предпочесть статический метод исследования, поскольку технически он значительно проще резонансного метода.

Рассмотрим особенности определения деформации косозубого зубчатого зацепления статическим и резонансным методами.

Статический метод основан на том, что упругое смещение ведущего колеса может быть определено как пространственное движение Δ, состоящее из двух компонент: перемещения, совершаемого за счет деформации зацепления Δ_1, и совместного перемещения зубчатых колес пары на упругом основании корпуса испытательного стенда Δ_2. Таким образом, деформация зубчатого зацепления Δ_1 может быть определена как относительное смещение колес, т. е. как разность двух абсолютных смещений первого и второго колеса

$$\Delta_1 = \Delta - \Delta_2. \tag{4.1}$$

В общем случае произвольного упругого смещения зубчатого колеса оно определится всеми шестью компонентами упругих перемещений в пространстве — три поступательных перемещения по осям выбранной системы координат и три поворота относительно этих осей координат.

Задача сводится к определению упругих смещений тела в пространстве по показаниям индикаторов, регистрирующих смещение твердого тела относительно неподвижной системы координат. Введем неподвижную систему координат xyz. Упругие перемещения

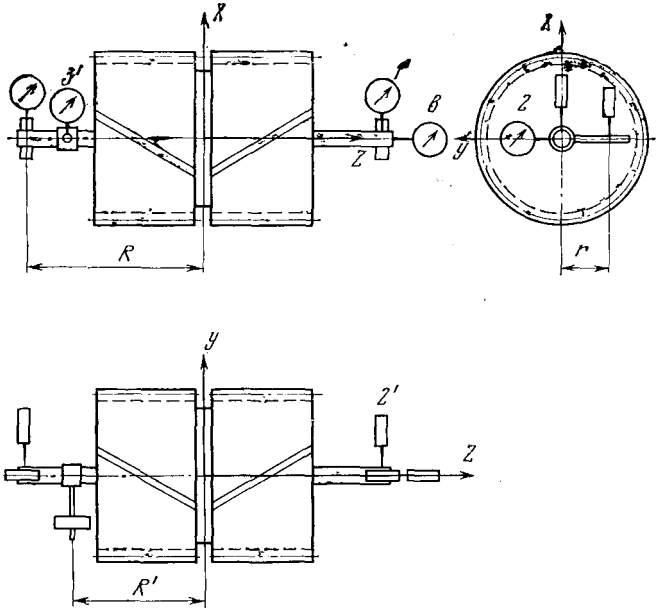


Рис. 20. Схема расположения индикаторов для измерения упругих перемещений зубчатого колеса

тела по направлению осей координат обозначим соответственно через u, v и w, а упругие повороты относительно этих же осей, соответственно, — φ_x, φ_y, φ_z. Для решения поставленной задачи необходимо выразить показания каждого индикатора через искомые упругие перемещения твердого тела в виде

$$\Delta_i = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}w + a_{4i}\varphi_x + a_{5i}\varphi_y + a_{6i}\varphi_z, \qquad (4.2)$$

где Δ_i — показания i-го индикатора, a_{ki} — коэффициенты пропорциональности между показанием i-го индикатора и k-й компонентой упругого перемещения твердого тела.

Форма записи в виде (2) допустима только в том случае, когда упругие перемещения тела малы, т. е. задача решается в линейной постановке.

Число индикаторов, потребное для координации тела в пространстве, зависит от числа независимых упругих перемещений тела. Так, для шести компонент упругих перемещений тела требуется шесть индикаторов. Индикаторы необходимо ориентировать таким образом, чтобы они реагировали на минимальное число компонент упругого перемещения тела в пространстве. Получаемая в этом случае система шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными распадается на независимые уравнения с меньшим числом неизвестных, что упрощает нахождение компонент перемещения твердого тела по зарегистрированным показаниям

индикаторов. В случае неудачного расположения индикаторов решение систем уравнений (4) можно получить, используя ЭВМ.

Составим уравнения (4.2) для системы индикаторов, показанной на рис. 20. Индикатор 1 регистрирует поступательное смещение u и упругий поворот φ_y. На смещение w этот индикатор не реагирует, остальные же компоненты упругого смещения тела изменяют показания этого индикатора в соответствии с зависимостью

$$\Delta_1' = R\left(1 - \cos \arcsin \frac{v}{R}\right) \approx R\left(1 - \cos \frac{v}{R}\right) \approx \frac{v^2}{R}.$$

Поскольку упругие перемещения значительно меньше R, то первое уравнение (4.2) примет вид

$$\Delta_1 = u + R_1\varphi_y, \tag{4.3}$$

где R_1 — аппликата индикатора 1.

Рассматривая аналогично влияние упругих перемещений тела на показания индикаторов, получим следующую систему

$$\Delta = Au, \tag{4.4}$$

где Δ — матрица-столбец показаний индикаторов, u — матрица-столбец упругих перемещений тела, A — матрица коэффициентов связи между упругими перемещениями тела и показаниями индикатора

$$\Delta = \begin{Vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Vmatrix} \qquad u = \begin{Vmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Vmatrix} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_6 & 0 & x_6 \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

Из (4.5) видно, что система уравнений (4.4) распадается на независимые уравнения. Так, из пятого уравнения (4.5) непосредственно находим

$$w = \Delta_5. \tag{4.6}$$

В первое и второе уравнения (4.5) неизвестными входят только u и φ_y, поэтому, решая их, найдем

$$u = (\Delta_1 z_2 - \Delta_2 z_1)/(z_2 - z_1), \tag{4.7}$$

$$\varphi_y = (\Delta_2 - \Delta_1)/(z_2 - z_1). \tag{4.8}$$

Из третьего и четвертого уравнений (4.5) аналогично найдем

$$v = (\Delta_3 z_4 - \Delta_4 z_3)/(z_4 - z_3), \tag{4.9}$$

$$\varphi_x = (\Delta_3 - \Delta_4)/(z_4 - z_3). \tag{4.10}$$

Из шестого уравнения (4.5) найдем

$$\varphi_z = \frac{1}{x_6}(\Delta_6 - v - \varphi_x z_6),$$

что с учетом (4.9) и (4.10) даст

$$\varphi_z = \frac{1}{x_6}\left(\Delta_6 - \Delta_6 \frac{z_4 + z_6}{z_4 - z_3} + \Delta_4 \frac{z_3 + z_6}{z_4 - z_3}\right). \qquad (4.11)$$

Уравнения (4.6) — (4.11) позволяют определить искомые компоненты упругого перемещения твердого тела по измеренным перемещениям шестью индикаторами. Аналогичные выражения могут быть получены для упругих перемещений второго зубчатого колеса, если на него установить подобным образом также шесть индикаторов. В общем случае произвольного закрепления испытуемых зубчатых колес к корпусу стенда их упругие перемещения будут зависеть не только от жесткости зубчатого зацепления, но и от жесткости сопряженных деталей (опор корпуса и др.). Поэтому решение вопроса о причинах упругих перемещений зубчатых колес возможно только на основе рассмотрения схемы нагружения и деформирования всего стенда.

С учетом полученных зависимостей выражения для компонент упругих перемещений, обусловленных жесткостью зубчатого зацепления, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Delta u + u_1 - u_2, \quad & \Delta\varphi_x = \varphi_{x1} - \varphi_{x2}, \\ \Delta v = v_1 - v_2, \quad & \Delta\varphi_y = \varphi_{y1} - \varphi_{y2}, \\ \Delta w = w_1 - w_2, \quad & \Delta\varphi_z = \varphi_{z1} - \varphi_{z2}. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Упругое смещение первого колеса под действием нормальной внешней силы P в соответствии с [71] может быть записано в матричной форме

$$(P_i) = (C_{11})(g_1) - (C_{21})(g_2), \qquad (4.13)$$

где P_i — матрица-столбец обобщенных сил; C_{11} — матрица жесткости, включающая все упругие связи, относящиеся к первому телу; C_{21} — матрица жесткости, включающая жесткости упругих связей между первым и вторым телами; g_i — обобщенные координаты смещений i-го тела.

Для одинаковых зубчатых колес жесткостная матрица (C_{11}) может быть выражена через жесткостную матрицу (C_{21}) в виде [71]

$$(C_{11}) = (C'_{11}) + (C_{21}),$$

тогда

$$(P_i) = (C'_{11})(g_1) + (C_{21})(g_1 - g_2). \qquad (4.14)$$

Матрица (C'_{11}) характеризует упругие связи между первым зубчатым колесом и стойкой стенда, а матрица (C_{21}) —характеризует упругие связи между зубчатыми колесами, т. е. жесткость зубча-

того зацепления. При этом упругая связь между зубьями имитируется тремя линейными и тремя поворотными связями.

Элементы матрицы (C_{11}) должны определяться предварительно нагружением первого зубчатого колеса системой обобщенных сил (P_i) непосредственно на стенде. Таким образом, задача сводится к определению элементов матрицы жесткости зубчатого зацепления (C_{21}) по замеренным смещениям (g_1) и $(g_1 - g_2)$ и предварительно построенной матрице (C'_{11}).

Матрица (C_{21}) имеет следующий вид:

$$\begin{matrix}
\sum^n C_i\alpha_i^2 & \sum^n C_i\alpha_i\beta_i & \sum^n C_i\alpha_i\gamma_i & \sum^n C_i\alpha_i l_i & \sum^n C_i\alpha_i m_i & \sum^n C_i\alpha_i n_i \\
\sum^n C_i\alpha_i\beta_i & \sum^n C_i\beta_i^2 & \sum^n C_i\beta_i\gamma_i & \sum^n C_i\beta_i l_i & \sum^n C_i\beta_i m_i & \sum^n C_i\beta_i n_i \\
\sum^n C_i\alpha_i\gamma_i & \sum^n C_i\beta_i\gamma_i & \sum^n C_i\gamma_i^2 & \sum^n C_i\gamma_i l_i & \sum^n C_i\gamma_i m_i & \sum^n C_i\gamma_i n_i \\
\sum^n C_i\alpha_i l_i & \sum^n C_i\beta_i l_i & \sum^n C_i\gamma_i l_i & \sum^n C_i l_i^2 & \sum^n C_i l_i m_i & \sum^n C_i l_i n_i \\
\sum^n C_i\alpha_i m_i & \sum^n C_i\beta_i m_i & \sum^n C_i\gamma_i m_i & \sum^n C_i l_i m_i & \sum^n C_i m_i^2 & \sum^n C_i m_i n_i \\
\sum^n C_i\alpha_i n_i & \sum^n C_i\beta_i n_i & \sum^n C_i\gamma_i n_i & \sum^n C_i l_i n_i & \sum^n C_i m_i n_i & \sum^n C_i n_i^2
\end{matrix} \tag{4.15}$$

Здесь n — число упругих связей, имитирующих жесткость зубчатого зацепления, $\alpha_i, \ldots, n_i$ — направляющие косинусы и единичные моменты i-ой упругой связи.

Формулу (4.14) можно записать в виде

$$(P'_i) = (C_{21})(g_1 - g_2),$$

где

$$(P'_i) = (P_i) - (C'_{11})(g_1), \tag{4.16}$$

поскольку (C'_{11}) считается известной из предварительного эксперимента. Тогда, раскрывая суммы, входящие в (4.15), и группируя члены с одинаковым номером i, получим

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 C_1 K_1 + \alpha_2 C_2 K_2 + \ldots + \alpha_n C_n K_n \\ \beta_1 C_1 K_1 + \beta_2 C_2 K_2 + \ldots + \beta_n C_n K_n \\ \gamma_1 C_1 K_1 + \gamma_2 C_2 K_2 + \ldots + \gamma_n C_n K_n \\ l_1 C_1 K_1 + l_2 C_2 K_2 + \ldots + l_n C_n K_n \\ m_1 C_1 K_1 + m_2 C_2 K_2 + \ldots + m_n C_n K_n \\ n_1 C_1 K_1 + n_2 C_2 K_2 + \ldots + n_n C_n K_n \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

где

$$K_i = \alpha_i \Delta u + \beta_i \Delta v + \gamma_i \cdot \Delta w + l_i \cdot \Delta\varphi_x + m_i \cdot \Delta\varphi_y + n_i \cdot \Delta\varphi_z,$$

или, переходя к матричной форме записи,

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \\ \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_n \\ l_1 l_2 l_3 \ldots l_n \\ m_1 m_2 m_3 \ldots m_n \\ n_1 n_2 n_2 \ldots n_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1K_1 \\ C_2K_2 \\ C_3K_3 \\ C_4K_4 \\ C_5K_5 \\ C_6K_6 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Но

$$\begin{bmatrix} C_1K_1 \\ C_2K_2 \\ C_3K_3 \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ C_nK_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & C_3 & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ 0 & & & C_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & C_3 & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ 0 & & & C_n \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 l_1 m_1 n_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 l_2 m_2 n_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 l_3 m_3 n_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n\beta_n\gamma_n l_n m_n n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta\varphi_x \\ \Delta\varphi_y \\ \Delta\varphi_z \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Сравнивая (4.14) с (4.18) и (4.19), видим, что матрица (C_{21}) может быть представлена как произведение матриц

$$(C_{21}) = (\alpha)(C)(\alpha)', \tag{4.20}$$

где (α) — матрица направляющих косинусов; $(\alpha)'$ — транспонированная матрица (α); (C) — диагональная матрица жесткости упругих связей, имитирующих жесткость зубчатого зацепления.

Таким образом, задача по определению жесткости зубчатого зацепления сводится к нахождению элементов диагональной матрицы (C). Когда (α), $(\alpha)'$ и (C)—квадратные матрицы шестого порядка, решение задачи может быть получено следующим образом. Из (4.14) с учетом (4.20) имеем

$$(P_i) = (K_i) + (\alpha)(C)(\alpha)'(g_1 - g_2), \tag{4.21}$$

где

$$(K_i) = (C'_{11})(g_1).$$

Умножая (4.21) слева на обратную к (α) матрицу $(\alpha)^{-1}$, получим

$$(\alpha)^{-1}(P_i - K_i) = (C_i)(\alpha)'(g_1 - g_2). \tag{4.22}$$

Обозначим

$$(\overline{P}_i) = (\alpha)^{-1}(P_1 - K_i), \qquad (\Delta_i) = (\alpha)'(g_1 - g_2),$$

окончательно получим

$$(\overline{P}_i) = (C_i)(\Delta_i). \tag{4.23}$$

Поскольку (C_i)—диагональная матрица, а $(\overline{P}_i)$ — матрица-столбец, то элементы матрицы (C_i) определятся как частное

$$C_i = P_i/\Delta_i. \tag{4.24}$$

Таким образом, по результатам статических измерений упругих перемещений зубчатых колес может быть определена жесткость зубчатого зацепления, характеризуемая элементами жесткостной матрицы (C_i).

При этом жесткость зубчатого зацепления представляется набором упругих линейных связей (пружин), ориентированных некоторым образом в пространстве. Это оказывается удобным и при составлении динамической модели для исследования колебательных процессов в планетарных механизмах.

При резонансном методе определяются резонансные частоты колебаний упругой системы при возбуждении ее вибратором направленного действия, которые совпадают с собственными частотами колебаний зубчатых колес на упругих связях.

Составив расчетную динамическую модель и получив частотное уравнение для полученных экспериментальным путем собственных частот колебаний системы, определяем параметры уравнений (жесткости упругих связей), описывающих колебательные движения зубчатых колес. Таким образом, исследование сводится к решению обратной задачи колебаний упругой системы, т. е. для выбранной динамической модели и уравнений движения, описывающих ее поведение, для измеренных собственных частот колебаний системы определяются параметры (жесткости упругих связей) уравнений движения.

Уравнения собственных колебаний системы, включающей зубчатые колеса, одно из которых жестко соединено с корпусом стенда, могут быть записаны в матричной форме

$$M_i\ddot{g}_i + C_{ij}g_i = 0, \tag{4.25}$$

где M_i — диагональная матрица.

$$M_i = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & 0 \\ & m_2 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & I_x & & \\ 0 & & & & I_y & \\ & & & & & I_z \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

C_{ij} — жесткостная матрица (4.15); $\ddot{g}_i$; g_i — матрицы-столбцы обобщенных координат ускорений и смещений колеса, соответственно.

Система уравнений (4.25) имеет ненулевое решение только при условии

$$\Delta\omega = \begin{vmatrix} C_{11}-m\omega^2 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22}-m\omega^2 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}-m\omega^2 & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}-m\omega^2 & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55}-m\omega^2 & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.27}$$

Таким образом, задача сведена к определению элементов частотного определителя C_{ij} по измеренным величинам собственных частот колебаний системы ω_i^2. Такой подход к решению задачи о жесткости зубчатого зацепления проще метода, изложенного в работе [26], поскольку не требуется определение амплитуд колебаний зубчатого колеса по направлению осей координат.

Можно показать, что, раскрывая определитель (4.27) по строкам, приходим к системе из двух (при числе упругих связей равным двум) уравнений с двумя неизвестными

$$K_{11}C_1 + K_{12}C_2 - K_{13}C_1C_2 = K_{14}, \qquad C_{21}C_1 + K_{22}C_2 - K_{23}C_1C_2 = K_{24}, \tag{4.28}$$

где C_i — искомые величины жесткостей упругих связей; K_{ij} — коэффициенты, зависящие от инерционных свойств колеса и измеренных собственных частот колебаний упругой системы.

Решая систему уравнений (4.28), можно найти жесткости пружин, имитирующих жесткости зубьев полушевронов.

Следовательно, при резонансном методе также решается задача об определении параметров упругих связей, имитирующих жесткость зубьев. Для такой реализации резонансного метода необходимо знание лишь резонансных частот при возбуждении нагруженной системы вибратором, которые могут быть измерены с высокой точностью многими известными средствами.

Глава 3. ДЕФОРМАЦИЯ ШЛИЦОВ

Шлицевые соединения являются одним из основных элементов уравнительных механизмов, от конструктивного исполнения которых (в частности от их деформативности) в значительной степени зависит эффективность плавающей подвески центральных колес. Кроме того, в некоторых случаях контактная податливость шлицов является определяющей в общем балансе упругих деформаций машин и механизмов. Поэтому при составлении расчетных динамических систем механизмов приходится учитывать деформативность шлицевых соединений.

Крутильная жесткость шлицевого соединения, передающего крутящий момент M, может быть определена как отношение

$$C_{кр} = M/\varphi = MR_0/\delta_ш = z_ш R_0^2 C_ш, \qquad (а)$$

где φ — дополнительный угол поворота одного шлицевого венца относительно другого, обусловленный упругой деформацией пары шлицов $\delta_ш$, радиан, R_0 — радиус основной окружности шлицевого венца, *см*, $\delta_ш$ — средняя величина суммарной деформации пары шлицов, *см*

$$\delta_ш = \overline{P}/C_ш,$$

$C_ш$ — жесткость пары шлицов, *кГ/см*, $\overline{P}$ — средняя величина нагрузки на шлиц, *кГ*.

$$\overline{P} = M/R_0 z_ш,$$

$z_ш$ — число шлицов в соединении.

Установленная связь между крутильной жесткостью шлицевого соединения $C_{кр.ш}$ и жесткостью пары шлицов $C_ш$ справедлива только для абсолютно точного шлицевого соединения, передающего чистым крутящий момент, все шлицы которого нагружены одинаковыми силами $\overline{P}$. В реальных условиях, однако, погрешности изготовления шлицевых венцов по окружным шагам приведут к тому, что после сборки соединения между сопряженными профилями шлицов будут существовать зазоры S_i, определяемые наложением кривых накопленных погрешностей окружных шагов венцов.

Следовательно, при ограниченной точности изготовления шлицевых венцов, крутильная жесткость шлицевого соединения будет определяться как отношение

$$C_{кр.\,ш.\,о} = \frac{M}{\varphi_{max}} = z_ш R_0^2 \cdot \frac{\overline{P}}{\delta_0}.$$

Если ввести коэффициент неравномерности нагрузки $K_{нер}$, равный отношению нагрузки, приложенной к паре шлицов с начальным нулевым зазором, к средней нагрузке в соединении, то формула для $C_{кр.ш.о.}$ примет вид

$$C_{кр.\,ш.\,о} = z_ш \cdot R_0^2 \frac{C_ш}{K_{нер}} = C_{кр.\,ш}/K_{нер}, \qquad (б)$$

т. е. крутильная жесткость реального шлицевого соединения в $K_{нер}$ меньше крутильной жесткости абсолютно точного шлицевого соединения.

Шлицевые соединения уравнительных механизмов планетарных редукторов имеют характерную особенность, заключающуюся в периодическом изменении крутильной жесткости соединения при работе зубчатой передачи. Действительно, в уравнительном механизме эпицикла нагрузка на шлицы передается от зубчатых зацеплений сателлит — эпицикл. Поэтому благодаря изгибной податливости шлицевых муфт в сечениях, где действуют усилия от сателлитов, будут иметь место наибольшие деформации ободьев муфт. Это приведет к тому, что деформация шлицов, как сумма двух составляющих, одна из которых определяется собственно податливостью пары шлицов, а вторая — податливостью ободьев муфт, будет зависеть не только от зазоров в соединении, но и от углового расстояния пары шлицов от сечений, где действуют усилия от сателлитов.

Таким образом, в шлицевых соединениях уравнительного механизма эпицикла периодически будет изменяться крутильная жесткость соединения. При этом колебание ее определяется исключительно податливостью ободьев сопрягаемых муфт, податливостью самих шлицов и погрешностями изготовления шлицевых венцов по окружным шагам.

В уравнительном механизме солнечной шестерни нагрузка на шлицы передается от сопряженной муфты, соединенной, как правило, с ротором привода. Неизбежные погрешности монтажа агрегатов-планетарного механизма и привода — приводят к тому, что рассматриваемое шлицевое соединение работает в условиях перекоса осей муфт. Известно, что в этом случае нагрузка между шлицами распределяется неравномерно, а в зависимости от расположения шлицов по отношению к плоскости перекоса осей муфт. Крутильная жесткость шлицевого соединения здесь также будет определяться парой шлицов, имевшей минимальный зазор.

В момент прохождения пары шлицов с минимальным зазором (обусловленным погрешностью шлицевых венцов по окружным шагам) через сечение, где минимальная величина бокового зазора (обусловленного перекосом осей муфт), шлицевое соединение будет иметь минимальную крутильную жесткость.

Таким образом, в шлицевых соединениях уравнительного механизма солнечной шестерни периодически будет изменяться

крутильная жесткость соединения. При этом колебание ее определяется податливостью шлицов, погрешностями изготовления шлицевых венцов по окружным шагам и погрешностями монтажа осей муфт соединяемых агрегатов.

§ 1. Деформация шлицов при отсутствии перекоса осей муфт

Характерной особенностью шлицевых соединений уравнительных механизмов планетарных редукторов является работа их в условиях перекоса осей сопрягаемых муфт и упругих деформаций ободьев муфт. В этом случае нагрузка по поверхности шлицов распределяется неравномерно, резко концентрируясь со стороны одного из торцов шлицов. Кроме того, поскольку боковые поверхности контактирующих шлицов номинально совпадают друг с другом, то даже незначительные погрешности изготовления и монтажа шлицевого соединения приводят к неизбежному выходу контакта шлицов на вершину или на торец шлицов.

Поэтому номинальный контакт шлицов по всей боковой поверхности, как правило, не реализуется, поэтому знание номинальной жесткости шлицов не представляет практического интереса, а служит лишь для оценки нижней границы ее значения.

При определении номинальной жесткости шлицов, когда контакт их осуществляется по номинальной боковой поверхности, необходимо учитывать качество поверхностных слоев и, в первую очередь, их шероховатость. Теоретическое решение задачи о контакте шероховатых поверхностей представляет значительные трудности, поэтому наряду с ними большое значение приобретают экспериментальные методы исследования деформации шероховатых поверхностей контакта [62].

В работе [60] экспериментальным путем для прямобочных шлицов, работающих без перекоса, установлена зависимость между номинальными контактными напряжениями $\sigma_к$ и контактной деформацией пары шлицов $w_к$

$$w_{к_ш} = K\sigma_к, \tag{1.1}$$

где $K = (3 \div 4)\cdot 10^{-6}$ *см*³/*кГ* — коэффициент контактной податливости

$$\sigma_к = P/F = P/bh,$$

b — ширина шлица, *см*, h — активная часть высоты шлица, *см*.

Формула (1.1) показывает, что при контактировании шлицов по номинальной поверхности справедлива гипотеза Винклера, которая утверждает, что перемещение упругого тела в некоторой точке зависит только от контактного напряжения в этой точке. Неудобство пользования формулой (1.1) связано с тем, что коэффициент контактной податливости является размерной величиной,

поэтому напишем структурную формулу для коэффициента K. Закон Гука дает связь между относительной деформацией и напряжением

$$\Delta l/l = \sigma/E. \tag{1.2}$$

Сопоставляя (1.1) и (1.2), можно записать

$$K = Cl/E, \tag{1.3}$$

где l — некоторый линейный размер, *см*, E — модуль упругости, *кГ/см*^{2}, C — безразмерный коэффициент.

Безразмерный коэффициент C имеет четкий физический смысл и характеризует состояние контактирующих поверхностей, их чистоту, твердость, наличие смазки. Поскольку характерным линейным размером в шлицевом соединении служит модуль, то из условий эксперимента может быть найдена величина безразмерного коэффициента C ($m = 3$ *мм*, $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}).

$$C = (3 \div 4) \cdot 10^{-6} \cdot \frac{E}{m} = (21{,}5 \div 28{,}7). \tag{1.4}$$

Подстановка в формулу (1.1) значения коэффициента K из (1.3) с учетом (1.4) даст следующую формулу для контактной деформации шлицов:

$$w_{\text{кш}} = 21{,}5 \cdot \frac{m}{E} \cdot \sigma_{\text{к}}. \tag{1.5}$$

С учетом выражения для $\sigma_{\text{к}}$ зависимость для линейной контактной жесткости пары шлицов примет вид

$$C_{\text{ш. л}} = \frac{P}{w_{\text{к}}} = K_{\text{ш}} E m, \ \text{кГ/см}, \tag{1.6}$$

где $K_{\text{ш}} = \psi(1 + f)/21{,}5 \cos \alpha$, ψ — коэффициент ширины шлица, $\psi = b/m$, f — коэффициент высоты головки зуба, α — угол зацепления.

Крутильная жесткость шлицевого соединения, обусловленная только контактной податливостью шлицов может быть определена по формуле

$$C_{\text{кр. ш}} = zR_0^2 \frac{C_{\text{ш. л}}}{K_{\text{нер}}} = K'_{\text{ш}} d_{\text{д}}^3 \cdot E, \ \text{кГсм/рад}, \tag{1.7}$$

где

$$K'_{\text{ш}} = \psi(1 + f) \cos \alpha / 86 \cdot K_{\text{нер}},$$

$d_{\text{д}}$ — диаметр делительной окружности шлицевого венца, *см*.

Переходя к удельной контактной податливости шлицов, из (1.6) получим

$$\delta_{\text{кш}} = w_{\text{кш}}/P/b = 21{,}5 \cos \alpha / (1 + f) E. \tag{1.8}$$

Принимая $f = 1$ и $\alpha = 20°$, получим

$$\delta_{к.ш} = 11{,}8/E. \tag{1.9}$$

Податливость прилежащей к шлицу обода шлицевой муфты и изгибную податливость шлица определим подобно тому, как это делалось при решении задачи о податливости прямого зуба. Приводя контактную нагрузку, распределенную по номинальной боковой поверхности шлица, к сосредоточенной в точке на делительном диаметре, из рис. 16 ($K = 10$) найдем, что суммарная податливость пары шлицов, контактирующих по всей номинальной боковой поверхности, может быть определена как сумма

$$\delta'_{\Sigma ш} = \Sigma(\delta_{и.ш.i} + \delta_{осн.ш.i}) + \delta_{к.ш} \approx \frac{15}{E}. \tag{1.10}$$

При проектировании шлицевых соединений с целью снижения концентрации нагрузки по длине шлицов последним придают бочкообразную форму. При этом параметры «бочки» выбирают такими, чтобы не происходило выхода точки контакта шлицов на торец.

В связи с этим представляет интерес знание деформативности шлицов с бочкообразной формой образующих при отсутствии перекоса осей муфт. В этом случае при номинальном расположении боковых поверхностей шлицов друг относительно друга контакт между ними будет происходить по линии — эвольвенте — в среднем сечении по длине шлицов.

Изгибная податливость шлица определится тогда из задачи о защемленной по одному краю бесконечной пластине, на боковой поверхности которой в средней точке среднего сечения действует сосредоточенная сила. Известно, что если сосредоточенная нагрузка приложена на свободном краю пластины, то перемещение ее в точке приложения нагрузки определяется по формуле [65]

$$w_{и.ш} = 0{,}168\frac{Ph_ш^2}{\pi D}, \tag{1.11}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, заменяющей шлиц.

Подстановка в (1.211) значений входящих в нее величин дает следующий результат

$$w_{и.ш} = \frac{0{,}168\cdot 12(1-\nu^2)}{\pi E m}\left(\frac{1+f+c}{\pi/2}\right)^3\frac{P}{(1+f+c)}. \tag{1.12}$$

Если нагрузка приложена не на свободном краю, а в средней точке активной части высоты шлица [относительная координата равна $(1 + f + c)/(1 + c)$], то по [94] для $f = 1$ и $c = 0{,}25$ в формулу (1.12) следует ввести поправочный коэффициент 0,2. Тогда формула для изгибной податливости шлица с бочкообразной об-

разующей при номинальном контакте поверхностей примет вид

$$\delta_{\text{и. ш}} = \frac{w_{\text{и. ш}}}{P/b} = \frac{0{,}168 \cdot 2{,}4\,(1-\nu^2)}{\pi E}\left(\frac{1+f+c}{\pi/2}\right)^3\left(\frac{\psi}{1+f+c}\right), \quad (1.13)$$

где ψ — коэффициент длины зуба, $\psi = b/m$.

Принимая здесь $f = 1$, $c = 0{,}25$, $\nu = 0{,}3$, получим

$$\delta_{\text{иш}} = 0{,}1525\psi/E. \quad (1.14)$$

Податливость прилежащей к шлицу части обода шлицевой муфты может быть определена в виде

$$\delta_{\text{осн. ш}} = 3{,}44/E. \quad (1.15)$$

Контакт пары шлицов с бочкообразной образующей одного из них может быть сведен к контакту цилиндра с плоскостью. В связи с этим для определения контактной податливости шлицов также можно воспользоваться формулой

$$\delta_{\text{к. ш}} = 3{,}22/E. \quad (1.16)$$

Таким образом, суммарная податливость пары шлицов (один из которых имеет бочкообразную форму), контактирующих по линии при номинальном положении поверхностей, может быть определена с учетом (1.14), (1.15) и (1.16) как сумма

$$\delta'_{\Sigma\text{ш}} = \sum^{2}(\delta_{\text{и. ш. }i} + \delta_{\text{осн. ш. }i}) + \delta_{\text{к. ш}} = \frac{10{,}1 + 0{,}305\psi}{E}. \quad (1.17)$$

§ 2. Деформация шлицов при наличии перекоса осей муфт

Перекос осей муфт в значительной степени искажает характер контактирования профилей шлицов, поэтому представляет интерес оценить податливость шлицов в этом случае. Изучение геометрии шлицевых соединений при перекосе осей муфт [64] показывает, что в зависимости от ориентации рассматриваемой пары шлицов по отношению к плоскости перекоса осей муфт суммарный перекос контактирующих поверхностей шлицов может быть представлен как векторная величина, являющаяся суммой двух компонентов.

Во-первых, происходит перекос поверхностей контактирующих шлицов относительно касательной к эвольвентному профилю шлицов. Такой перекос приводит к выходу контакта на один из торцов шлица. Величина угла перекоса поверхностей шлицов в этом случае может быть определена по формуле

$$\omega_\tau = \omega \cos\theta. \quad (2.1)$$

где ω — угол перекоса осей муфт, θ — угловая координата рассматриваемой пары контактирующих шлицов относительно пары шлицов, первой вступившей в контакт при перекосе осей муфт.

Поскольку максимальный угол перекоса поверхностей контактирующих шлицов приходится на наиболее нагруженную пару шлицов ($\theta = 0°$), то обычно учитывается именно эта составляющая суммарного угла перекоса осей муфт.

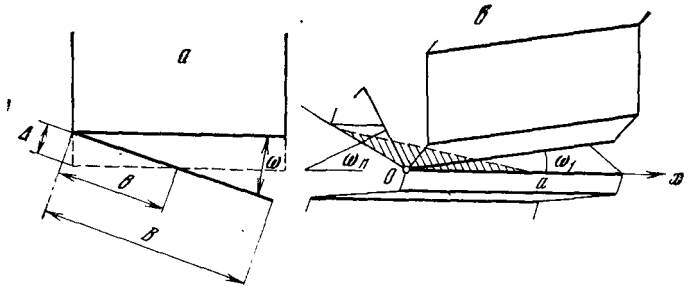


Рис. 21. Схемы контактирования шлицов с прямолинейной образующей при перекосе осей муфт

а — относительно касательной к профилю; *б* — относительно касательной к профилю и образующей

Во-вторых, происходит перекос поверхностей контактирующих шлицов относительно их нормали к эвольвентным профилям, приводящий к выходу контакта на вершину одного из шлицов. Величина угла перекоса поверхностей шлицов в этом случае может быть определена по формуле

$$\omega_n = \omega \sin \theta. \tag{2.2}$$

Поскольку угол ω_n достигает своего максимального значения для пары шлицов, последней вступившей в контакт ($\theta = \pi/2$), и, значит, наименее нагруженной, то обычно эта составляющая суммарного угла перекоса осей муфт не учитывается.

Таким образом, если для пары контактирующих шлицов с координатой $\theta = 0°$ контакт выходит на один из торцов, а для пары шлицов с координатой $\theta = \pi/2$ — на вершину одного из торцев, то для пары шлицов с произвольной координатой θ контакт будет распространяться на некотором участке поверхности шлицов (рис. 21).

В работе [85] сделана попытка расчетным путем определить деформацию шлицов при перекосе поверхностей шлицов на угол $\omega_t = \omega$. Суммарная податливость шлицов при перекосе осей муфт может быть представлена в виде [2]

$$\delta_{\Sigma\text{ш}} = \frac{1}{E}(1{,}14\psi^2 + 36{,}0\psi + 7{,}9). \tag{2.3}$$

Как видно из формулы (2.3), для коротких шлицов определяющей в суммарной деформации шлицов будет контактная составля-

ющая. Это послужило основанием в работе [85] не учитывать все компоненты деформации шлицов кроме контактной составляющей.

В изложенном методе определения контактной деформации шлицов при перекосе осей муфт вызывает возражение выбор величины коэффициента $k = 1/9$. Очевидно, что этот эмпирический коэффициент должен соответствовать контактным деформациям шлицов в экспериментальной шлицевой муфте. Между тем анализ работы [85] показывает, что величина этого коэффициента не соответствует условиям деформирования элементов экспериментальной шлицевой муфты.

Действительно, как следует из работы [85], даже при максимальном угле перекоса осей муфт ($\omega = 1°30'$) нагрузку воспринимали все шлицы муфты при всех крутящих моментах от 50 до 400 *кгм*. Естественно, что это могло произойти только в том случае, если наиболее нагруженный шлиц деформирует на величину бóльшую, чем максимальная величина зазора (в шлицах, последними вступившими в контакт). Как следует из расчетов, приведенных в работе [85], при $\omega = 1°30'$ и $M_{кр} = 400$ *кГм* деформация наиболее нагруженной пары шлицов равна $w_{k\,max} = 0{,}22$ *мм*. Максимальная же величина бокового зазора между шлицами, последними вступившими в контакт, при данном угле перекоса осей составит

$$S_{max} = \frac{b\omega}{2} = \frac{20 \cdot 0{,}0262}{2} = 0{,}26 \text{ мм},$$

т. е. $S_{max} > w_{k\,max}$ и поэтому все шлицы при данном крутящем моменте никак не могли воспринимать нагрузку. Тем более этого не могло произойти при меньших крутящих моментах, нагружающих шлицевую муфту. Следовательно, даже при величине эмпирического коэффициента $k = 1/9$ не могло наблюдаться отмеченного при эксперименте распределения нагрузки между шлицами.

По-видимому, нагружение шлицов, зарегистрированное при тензометрировании, объясняется тем, что деформировали не только шлицы, но и обод муфты с внутренними шлицами. При этом деформация обода муфты (при малых нагрузках двумя сосредоточенными силами, при больших нагрузках — распределенными на двух диаметрально противоположных участках силами) будет выравнивать зазоры, вызванные перекосом осей муфт, что приведет к более равномерному вступлению в контакт шлицов.

Анализ деформативности обода шлицевой муфты позволит получить необходимые количественные данные по рассматриваемому эксперименту, однако здесь следует отметить, что приведенный в работе [85] эмпирический коэффициент $k = 1/9$ дает завышенную величину контактной податливости шлицов (и, как показано выше, недостаточно завышенную, чтобы объяснить вступление в контакт всех шлицов). Это необходимо сделать потому, что результаты работы [85] нашли широкое применение при исследовании изгибающих моментов в шлицевых соединениях при переко-

се осей муфт, при этом величина коэффициента $k = 1/9$ принимается без каких-либо корректировок и оговорок.

Поскольку существующие методы определения податливости шлицов строились из упрощенной модели шлица-балки, а контактная податливость их определена без достаточно строгого учета характера деформирования поверхностей шлицов, то ниже предлагается метод расчетного определения податливости шлицов, свободный от указанных упрощений.

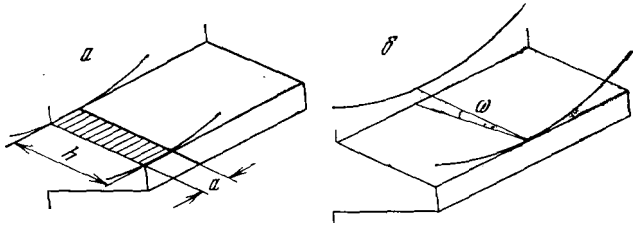


Рис. 22. Схемы контактирования шлицов с криволинейной образующей при перекосе осей

а — относительно касательной к профилю: *б* — относительно образующей

Для определения податливости шлицов рассматривается контакт двух упругих тел, поведение поверхностных слоев которых подчиняется гипотезе Винклера. При этом, однако, коэффициент постели основания (упругого тела) определяется из приведенного выше решения задачи о податливости шлицов при отсутствии перекоса осей муфт (1.10). Таким образом, коэффициент постели учитывает не только контактную податливость боковых поверхностей шлицов, как это обычно делается при решении контактных задач с применением гипотезы Винклера, но и общую податливость шлицов. Принятие коэффициента постели постоянным, независимо от характера концентрирования контакта на боковой поверхности шлицов, вносит в расчет некоторую погрешность, однако то, что осредняется вспомогательная величина (коэффициент постели), а не сами упругие перемещения, уменьшает эту погрешность расчета.

Контакт наиболее нагруженной пары шлицов с прямолинейной образующей (когда площадка контакта выходит на торец шлицов) может быть представлен как контакт двух упругих тел с плоскими поверхностями длины «в» и ширины h, имеющих начальное неприлегание, характеризуемое углом перекоса $\omega_\tau = \omega \cos \theta^\circ = \omega$ (рис. 21). Принимая гипотезу Винклера, запишем упругие перемещения точек в пределах площадки контакта в виде:

$$w_1 = c_1 p(x), \quad w_2 = c_2 p(x), \tag{2.4}$$

где c_1, c_2 — коэффициент контактной податливости первого и второго упругого тела, $p(x)$ — распределенная некоторым образом по длине площадки контакта «$b_к$» удельная нагрузка.

Суммируя (2.4), получим сближение точек в виде

$$w_1 + w_2 = \Delta - \omega x \text{ или } cp(x) = \Delta - \omega x, \tag{2.5}$$

где Δ — мера упругой деформации контактирующих тел, равная контактной деформации тел в точке начального контакта 0, $c = c_1 + c_2$ — приведенный коэффициент контактной податливости упругих тел.

Добавляя к уравнению (2.5) условие равенства усилий в контакте внешней сжимающей тела силе P

$$\int_0^{b_к} p(x)\,dx = P/h, \tag{2.6}$$

где h — активная часть высоты шлица, ширина площадки контакта, $b_к$ — длина площадки контакта упругих тел, получим систему уравнений для решения задачи о податливости упругих тел, имитирующих контакт шлицов. Поскольку в крайней точке площадки контакта тел $x = b_к$ контактная нагрузка равна нулю, из (2.5) найдем выражения для сближения тел в виде

$$\Delta = \omega b_к. \tag{2.7}$$

Подстановка выражения для контактной нагрузки $p(x)$ из (2.5) в (2.6) и последующее интегрирование в пределах площадки контакта с учетом (2.7), даст следующую зависимость для длины площадки контакта

$$b_к = \sqrt{2Pc/h\omega}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) с учетом (2.8) получим выражение для сближения упругих тел

$$\Delta = \sqrt{2Pc\omega/h}. \tag{2.9}$$

Максимальная нагрузка в точке начального контакта упругих тел найдется из (2.5) при $x = 0$ с учетом (2.9) в виде

$$p(0) = \sqrt{2P\omega/hc}, \tag{2.10}$$

откуда коэффициент концентрации нагрузки равен

$$K_k = \frac{p(0)}{P/bh} = \sqrt{2h \cdot \frac{b\omega}{Pc/b}}. \tag{2.11}$$

Полученные формулы, очевидно, справедливы для случая, когда длина площадки контакта $b_к$ меньше длины зуба b. Входящая в эти формулы величина коэффициента постели c может быть найдена из решения задачи о податливости шлица при отсутствии перекоса осей (1.10) в виде

$$c = 15\frac{h}{E} = 15(1+f)\cdot\frac{m}{E}, \tag{2.12}$$

и для $f = 1$

$$c = 30\frac{m}{E}. \tag{2.13}$$

Подстановка значения коэффициента постели c из (2.3) в (2.8) — (2.11) даст следующий результат (табл. 4).

Как следует из формулы (2.9), суммарная деформация шлицов зависит нелинейно от нагрузки. В связи с этим суммарная податливость шлицов является функцией нагрузки, действующей на шлицы и может быть определена по формуле

$$\delta_{\Sigma ш} = \frac{\Delta}{P/b} = b\sqrt{\frac{2c\omega}{Ph}}. \tag{2.14}$$

Здесь $b\omega$ — максимальный просвет (зазор) между профилями шлицов при перекосе осей муфт, а P/b — удельная (расчетная) нагрузка на профилях шлицов, следовательно, отношение $b\omega/P/b$ равно податливости шлицов в случае деформации их на величину максимального зазора между ними при перекосе осей муфт.

Контакт пары шлицов с прямолинейной образующей (в случае, когда площадка контакта выходит на вершину одного из шлицов) также может быть представлен как контакт двух упругих тел длины h и ширины b, имеющих начальное неприлегание, характеризуемое углом перекоса ω_1 относительно образующей. В этом случае, также используя гипотезу Винклера, получим аналогичные результаты:

$$h_k = \sqrt{2Pc/b\omega_1}, \tag{2.15}$$

где

суммарная деформация шлицов

$$\Delta = \sqrt{\frac{2Pc\omega_1}{b}}, \tag{2.16}$$

максимальная нагрузка на шлицах

$$p(0) = \sqrt{\frac{2P\omega_1}{bc}}, \tag{2.17}$$

коэффициент концентрации нагрузки

$$K_к = \frac{P(0)}{P/bh} = \sqrt{\frac{2hb\omega_1}{cP/b}\cdot\frac{h}{b}}. \tag{2.18}$$

Суммарная податливость шлицов также является функцией нагрузки, действующей на шлицы, и может быть определена по формуле

$$\delta_{\Sigma ш} = \frac{\Delta}{P/b} = \sqrt{\frac{2\omega_1}{c}\cdot\frac{b}{P}}. \tag{2.19}$$

Контакт пары шлицов с произвольной ориентацией θ относительно плоскости перекоса также может быть представлен как

Таблица 4

Параметр	Вид контакта			
	Прямолинейная образующая			
	без перекоса осей	с перекосом осей муфт		
		торец	кромка	вершина
b_k	b	$\sqrt{\frac{2Pc}{h\omega}}$	$\sqrt[3]{6Pc \cdot \frac{\omega_1}{\omega_\tau^2}}$	b
h_k	h	h	$\sqrt[3]{6Pc \cdot \frac{\omega_\tau}{\omega_1^2}}$	$\sqrt{\frac{2Pc}{b\omega_1}}$
Δ	$12{,}31 \frac{P}{bE}$	$\sqrt{\frac{2Pc\omega}{h}}$	$\sqrt[3]{6Pc\omega_\tau\omega_1}$	$\sqrt{\frac{2Pc\omega_1}{b}}$
$\delta_{\Sigma\text{ш}}$	$\frac{12{,}31}{E}$	$b\sqrt{\frac{2c\omega}{Ph}}$	$b\sqrt[3]{6\frac{c}{P^2}\omega_\tau\omega_1}$	$\sqrt{\frac{2\omega_1}{c} \cdot \frac{b}{P}}$
$p(0)$	$\frac{P}{bh}$	$\sqrt{\frac{2P\omega}{hc}}$	$\sqrt[3]{6\frac{P}{c^2}\omega_\tau\omega_1}$	$\sqrt{\frac{2P\omega_1}{bc}}$
K_k	1	$\sqrt{2h\frac{b\omega}{\frac{P}{b} \cdot c}}$	$bh\sqrt[3]{\frac{6\omega_\tau\omega_1}{c^2P^2}}$	$\sqrt{2h\frac{b\omega_1}{\frac{P}{b}c} \cdot \frac{h}{b}}$

Таблица 4 (окончание)

Параметр	Вид контакта			
	Криволинейная образующая			
	без перекоса осей	с перекосом осей муфт		
		торец	кромка	вершина
b_k	$1{,}52\sqrt{\frac{P}{h}\cdot\frac{R}{E}}$	$\sqrt[3]{3\frac{P}{h}cR}$	$\sqrt[5]{15PcR^2\omega_1}$	$\sqrt[5]{\left(\frac{15}{2}Pc\right)^2\frac{1}{R\omega_1^3}}$
h_k	h	h	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15Pc}{\omega_1}\right)^2\frac{1}{R\omega_1}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15}{2}Pc\right)^2\frac{1}{R\omega_1^3}}$
Δ	$\frac{(10{,}1+0{,}305\psi)P}{bE}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3R}\left(\frac{Pc}{h}\right)^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{(15Pc\omega_1)^2\frac{1}{R}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15}{2}Pc\right)^2\frac{\omega_1^2}{R}}$
$\delta_{\Sigma ш}$	$\frac{(10{,}1+0{,}305\psi)}{E}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3PR}\left(\frac{c}{h}\right)^2}$	$\frac{b}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15c\omega}{P}\right)^2\frac{1}{RP}}$	$\frac{b}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15\omega_1}{2Pc}\right)^2\cdot\frac{1}{RPc}}$
$P(0)$	$0{,}418\sqrt{\frac{P}{h}\cdot\frac{E}{R}}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3cR}\left(\frac{P}{h}\right)^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15P\omega_1}{c}\right)^2\frac{1}{Rc}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15}{2}\cdot\frac{P\omega_1}{c}\right)^2\frac{1}{Rc}}$
K_k	$0{,}418\sqrt{\frac{h}{P}\cdot\frac{E}{R}}$	$\frac{3}{2}b\sqrt[3]{\frac{1}{3cR}\frac{h}{P}}$	$\frac{bh}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15\omega}{Pc}\right)^2\frac{1}{RPc}}$	$\frac{bh}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{15\omega_1}{2Pc}\right)^2\frac{1}{RPc}}$

контакт двух упругих тел длины b и ширины h, имеющих начальное неприлегание, характеризуемое углами перекоса $\omega_\tau = \omega \cos \theta$ и ω_1. Принимая гипотезу Винклера (2.4), получим сближение точек тел в виде

$$cp(x, y) = \Delta - (\omega_\tau x + \omega_1 y), \qquad c = c_1 + c_2, \tag{2.20}$$

где $p(x, y)$ — распределенная по площадке контакта упругих тел удельная нагрузка.

Из (2.20) видно, что площадка контакта ограничивается прямой, пересекающей оси координат ox и oy соответственно в точках b_k и h_k. Из условия равенства нулю удельной нагрузки в точках $(b_k, 0)$ и $(0, h_k)$ найдем

$$\Delta = \frac{1}{2}(\omega_\tau \cdot b_k + \omega_1 h_k) \tag{2.21}$$

и

$$\omega_\tau b_k = \omega_1 h_k,$$

т. е.

$$\Delta = b_k \omega_\tau = b_k \omega \cos \theta \tag{2.22}$$

и

$$b_k / h_k = \omega_1 / \omega_\tau.$$

Условие равенства усилий в контакте внешней сжимающей тела силе P, в данном случае запишется в виде

$$\int_0^{b_k} \int_0^{h_k\left(1 - \frac{x}{b_k}\right)} p(x, y)\, dx dy = P. \tag{2.23}$$

Подстановка в (2.23) значения $p(x, y)$ из (2.20) и интегрирование с учетом (2.22) дает следующий результат:

$$b_k = \frac{1}{\omega_\tau} \sqrt[3]{6Pc\omega_\tau\omega_1}, \tag{2.24}$$

$$h_k = \frac{1}{\omega_1} \sqrt[3]{6Pc\omega_\tau\omega_1}, \tag{2.25}$$

$$\Delta = \sqrt[3]{6Pc\omega_\tau\omega_1}, \tag{2.26}$$

$$p(0) = \sqrt[3]{\frac{6P}{c^2}\, \omega_\tau\omega_1}, \tag{2.27}$$

$$K_k = \frac{p(0)}{p/bh} = bh \sqrt[3]{6\omega_\tau\omega_1/c^2P^2}. \tag{2.28}$$

При определении податливости пары шлицов с криволинейной образующей контакт последних может быть сведен к контакту двух упругих тел, одно из которых ограничено плоскостью, а

второе — цилиндрической поверхностью. В этом случае можно было бы воспользоваться известным решением о контакте цилиндра с плоскостью, однако при этом пришлось бы учитывать специальным расчетом другие (кроме контактной) составляющие суммарной податливости шлицов. В связи с этим примем гипотезу Винклера для контакта шлицов с криволинейной образующей, а коэффициент постели, как и прежде, определим из решения задачи о податливости шлицов при отсутствии перекоса осей муфт.

Схема контактирования наиболее нагруженной пары шлицов с криволинейной образующей представлена на рис. 22, *а*. Уравнение деформаций в этом случае имеет вид

$$w_1 + w_2 = cP(x) = \Delta - \frac{x^2}{2R}, \tag{2.29}$$

где R — радиус кривизны криволинейной образующей шлица. Площадка контакта имеет вид прямоугольника со сторонами b_k (длина) и h_k (ширина). При $x = b_k$ удельная нагрузка обращается в нуль, откуда найдем выражение для сближения шлицов в виде

$$\Delta = b_k^2/2R. \tag{2.30}$$

Условие равенства усилий в контакте и внешней сжимающей телà силы P запишется в виде

$$\int_0^{b_k} p(x)\,dx = P/h. \tag{2.31}$$

Подстановка в (2.31) значения $p(x)$ из (2.29) и интегрирование с учетом (2.30) даст следующий результат

$$b_k = \sqrt[3]{3\frac{P}{h}cR}, \tag{2.32}$$

$$\Delta = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3R}\left(\frac{Pc}{h}\right)^2}, \tag{2.33}$$

$$p_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3cR}\left(\frac{P}{h}\right)^2}, \tag{2.34}$$

$$K_k = \frac{p_0}{P/bh} = \frac{3}{2}b\sqrt[3]{\frac{1}{3cR}\cdot\frac{h}{P}}. \tag{2.35}$$

Определяя коэффициент постели c из (2.12), представим формулы (2.32) — (2.35) в виде, приведенном в табл. 4.

Таким образом, суммарная податливость наиболее нагруженной пары шлицов с криволинейной образующей может быть определена из (2.33) в виде

$$\delta_{\Sigma ш} = \frac{\Delta}{P/b} = \frac{3}{2}b\sqrt[3]{\frac{1}{3PR}\left(\frac{c}{h}\right)^2}. \tag{2.36}$$

Для определения податливости пары шлицов в случае выхода площади контакта на вершину одного из шлицов с криволинейной образующей рассмотрим контакт цилиндра с плоскостью при перекосе оси цилиндра. В этом случае уравнение деформаций имеет вид

$$w_1 + w_2 = cp(x, y) = \Delta - \left(y \operatorname{tg} \omega_1 + \frac{x^2}{2R \cos \omega_1}\right). \qquad (2.37)$$

Площадка контакта ограничена параболой, пересекающей кромку шлица в точках $x_{1,2} = \pm b_k$, а ось y в точке $y = h_k$ и кромкой шлица. Поскольку в этих точках контактная нагрузка обращается в нуль, то сближение шлицов и связь между длиной a_k и шириной h_k площадки контакта найдется в виде

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(h_k \operatorname{tg} \omega_1 + \frac{b_k^2}{2R \cos \omega_1}\right) = h_k \operatorname{tg} \omega_1, \qquad (2.38)$$

так как

$$h_k = b_k^2/2R \sin \omega_1. \qquad (2.39)$$

Условие равенства усилий в контакте внешней сжимающей тела силы P запишется в виде

$$\int_{-b_k}^{b_k} \int_{0}^{h_k - \frac{x^2}{2R \sin \omega_1}} p(x, y)\, dx dy = P. \qquad (2.40)$$

Подстановка в (2.40) значения $p(x, y)$ из (2.37) и интегрирование с учетом (2.38) даст следующий результат:

$$b_k = \sqrt[5]{\frac{15}{4} P \cdot c,\ R^2 \sin 2\omega_1}, \qquad (2.41)$$

$$h_k = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{225}{4} \cdot \frac{P^2 c^2}{R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \omega_1 \cos \omega_1}}, \qquad (2.42)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{225}{4} \cdot \frac{P^2 c^2}{R} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1}}, \qquad (2.43)$$

$$p_{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{225}{4} \cdot \frac{P^2}{Rc^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1}}, \qquad (2.44)$$

$$K_k = \frac{p_{(0)}}{P/bh} = \frac{bh}{2}\sqrt[5]{\frac{225}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{P^3 R c^3 \cos \omega_1}}. \qquad (2.45)$$

Определяя коэффициент постели c из (2.12), представим формулы (2.32) — (2.34) в виде, данном в табл. 4.

Таким образом, суммарная податливость пары шлицов с криволинейной образующей может быть определена из (2.43) в виде

$$\delta_{\Sigma ш} = \frac{\Delta}{P/b} = \frac{b}{2}\sqrt[5]{\frac{225}{4} \cdot \frac{1}{P^3 R c^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1}}. \qquad (2.46)$$

Для пары шлицов с криволинейной образующей при произвольном угле ориентации θ относительно плоскости перекоса осей муфт контакт выходит на вершину шлица со стороны одного из торцов. В этом случае площадка контакта будет ограничена кромкой и торцом шлица и параболой, пересекающей их соответственно в точках b_k и h_k. По сравнению с предыдущим случаем площадка контакта уменьшается, поэтому условие равенства усилий в контакте внешней сжимающей тела силе P запишется в другом виде

$$\int_0^{b_k} \int_0^{b_k - \frac{x^2}{2R \sin \omega_1}} p(x, y)\, dx\, dy = P, \tag{2.47}$$

где ω_1 — угол перекоса шлицов относительно образующей.

В остальном расчет совпадает с предыдущим случаем, и формулы для определения неизвестных параметров примут следующий вид:

$$b_k = \sqrt[5]{\frac{15}{2} PcR^2 \sin 2\omega_1}, \tag{2.48}$$

$$h_k = \frac{1}{2} \sqrt[5]{225 \frac{P^2c^2}{R \operatorname{tg}^3 \omega_1 \cos \omega_1}}, \tag{2.49}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt[5]{225 \frac{P^2c^2}{R} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1}}, \tag{2.50}$$

$$p(0) = \frac{1}{2} \sqrt[5]{225 \frac{P^2}{Rc^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1}}, \tag{2.51}$$

$$K_k = \frac{p(0)}{P/bh} = \frac{bh}{2} \sqrt[5]{225 \frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1}{P^3 Rc^3 \cos \omega_1}}. \tag{2.52}$$

Таким образом, суммарная податливость пары шлицов с криволинейной образующей при произвольной ориентации относительно плоскости перекоса осей муфт может быть определена из (2.50) в виде

$$\delta_{\Sigma ш} = \frac{\Delta}{P/b} = 7{,}5b \sqrt[5]{\frac{h^2}{15P^3RE^2} \sin \omega_1 \operatorname{tg} \omega_1}. \tag{2.53}$$

Поскольку в приведенных формулах угол перекоса осей муфт мал, то можно принять $\sin \omega = \operatorname{tg} \omega = \omega$ и $\cos \omega = 1$. В этом случае формулы упростятся и примут вид, представленный в табл. 4. Приведенные в этой таблице параметры площадки контакта для шлицов с криволинейной образующей при отсутствии перекоса осей муфт определены из известного решения задачи о контакте цилиндра с плоскостью.

При выводе зависимостей для определения параметров площадки контакта шлицов и величины их деформации предполага-

лось, что шлицы находятся в условиях технологического перекоса осей сопрягаемых муфт. Это в основном соответствует условиям работы шлицевых соединений уравнительного механизма солнечной шестерни, когда податливость ободьев муфт незначительна и ее влиянием на характер контактирования и деформирования шлицов можно пренебречь. В шлицевых соединениях уравнительного механизма эпицикла, напротив, определяющим будет перекос шлицов, обусловленный деформативностью ободьев муфт, поэтому в предыдущих формулах под углом перекоса шлицов в общем случае следует понимать сумму

$$\omega_{\Sigma} = \omega_{\text{техн}} + \omega_{\text{упр}}, \tag{2.54}$$

где $\omega_{\text{техн}}$ — угол технологического перекоса осей муфт, обусловленный погрешностью монтажа соединяемых агрегатов, $\omega_{\text{упр}}$ — угол упругого перекоса образующих сопряженных шлицов, обусловленный деформативностью ободьев муфт.

Рассмотренные выше особенности перекоса осей муфт относятся к компонентам угла технологического перекоса $\omega_{\text{техн}}$, угол перекоса, вызванный упругими деформациями ободьев муфт, в свою очередь, может быть определен как сумма

$$\omega_{\text{упр}} = \omega_1 \pm \omega_2, \tag{2.55}$$

где ω_1, ω_2 — угол поворота наружного (внутреннего) шлицевого венца, вызванный упругой деформацией муфт.

Знак (+) или (—) в этой формуле, очевидно, зависит от направления поворота шлицевого венца муфты. Например, для шлицевого соединения эпицикл — блокирующая муфта ω_1 — угол поворота, связанный с поворотной деформацией обода эпицикла, а ω_2 — угол поворота, связанный с изгибной деформацией блокирующей муфты. При этом если знак угла поворота ω_2 не зависит от направления осевой силы в зубчатом зацеплении сателлит—эпицикл, так как определяется только радиальными усилиями в зубчатом зацеплении, то знак угла поворота ω_1 зависит от направления осевого усилия в зубчатом зацеплении. Поэтому, если осевая сила в зубчатом зацеплении сателлит—эпицикл сжимает блокирующую муфту, то в формуле (55) необходимо взять знак (+), так как в этом случае относительный угол поворота шлицов $\omega_{\text{упр}}$ увеличивается.

Запишем структурную формулу для угла поворота шлицевого венца (кольца) в следующем виде:

$$\omega_i = \frac{PR_i^2}{EI_i} K_i, \tag{2.56}$$

где R_i — радиус нейтральной окружности кольца, заменяющего шлицевый венец, при расчете деформативности шлицевой муфты,

I_i — момент инерции сечения этого кольца относительно радиальной центральной оси

$$I_i = B_i H_i^3/12,$$

H_i, B_i — толщина (ширина) кольца, K_i — коэффициент, учитывающий характер нагружения шлицевой муфты.

Согласно (55), формула для относительного угла поворота сопряженных шлицевых венцов примет вид

$$\omega_{\text{упр}} = \frac{PR_1^2}{EI_1}\left[K_1 \pm \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{I_1}{I_2} K_2\right]. \qquad (2.57)$$

Из формулы (2.57) следует, что упругая составляющая угла перекоса сопряженных шлицов является функцией нагрузки, действующей на них, поэтому задача о деформативности шлицов полностью может быть решена только на основе рассмотрения совместного деформирования шлицов и ободьев муфт. Неизвестные коэффициенты K_i, входящие в структурную формулу (2.57), могут быть определены из рассмотрения деформации ободьев муфт, однако при этом приходится задаваться законом распределения нагрузки между шлицами, который, в свою очередь, является неизвестным, поскольку зависит от деформативности ободьев муфт.

В связи с указанными трудностями, возникающими при исследовании деформативности шлицевых соединений, можно, используя метод последовательного приближения, получать уточненные решения или же, на основе экспериментальных исследований, определять неизвестные коэффициенты, входящие в структурные формулы для упругих перемещений и силовых факторов.

§ 3. Экспериментальные исследования деформации шлицов

Экспериментальное определение деформации шлицов представляет значительные технические трудности [2] и требует разработки специальных типов датчиков. Этим объясняется отсутствие работ, в которых непосредственно измерялась величина деформации шлицов, поэтому о деформации шлицов в известных работах приходится судить косвенно по результатам измерения других параметров.

В работе [10] определялась крутильная жесткость шлицевого соединения с помощью измерения относительного угла поворота шлицевых муфт под действием известного крутящего момента. Поскольку основной целью эксперимента было выявление влияния крутильной податливости ободьев шлицевых муфт на податливость всего шлицевого соединения, то испытания проводились при различных соотношениях наружного и внутреннего диаметров муфт. На рис. 23 приведены результаты экспериментального

определения крутильной жесткости шлицевого соединения, где через K_α обозначено отношение наружного диаметра одной муфты к внутреннему диаметру сопряженной муфты.

Как следует из графиков, увеличение податливости ободьев муфт значительно влияет на крутильную жесткость шлицевого соединения, однако при отношении диаметров $K_\alpha > 1{,}85$ это влияние практически отсутствует. Поэтому можно считать, что при $K_\alpha \geqslant 1{,}85$ крутильная жесткость шлицевого соединения определяется исключительно податливостью шлицов. Исходя

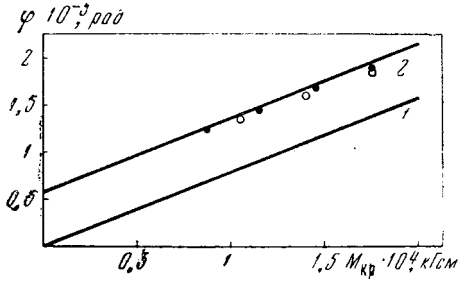


Рис. 23. Зависимость относительного угла поворота от приложенного крутящего момента [10]

из этого, определим крутильную жесткость шлицевого соединения, воспользовавшись полученными выше расчетными зависимостями для жесткости шлицов.

Для данного эксперимента ширина шлицевого венца $b = 5$ *мм*, $m = 2{,}5$ *мм*, материал — сталь. Предполагая, что перекос осей муфт отсутствует, определим жесткость шлицов по формуле (1.10), что даст

$$C_ш = b/\delta_ш = bE/12{,}31 = 8{,}7 \cdot 10^4 \ кГ/см. \qquad (3.1)$$

В работе [10] отсутствуют параметры испытанных шлицевых муфт, необходимые для определения крутильной жесткости шлицевого соединения. Поэтому приняв $\alpha = 20°$ и найдя из эскиза муфт $z = 22$, по формуле (а) найдем крутильную жесткость шлицевого соединения

$$C_{кр.ш} = z_ш R_0^2 C_ш = 12{,}8 \cdot 10^6 \ кГсм/рад. \qquad (3.2)$$

На рис. 23 кроме экспериментальных точек нанесена зависимость $\varphi = f(M)$, построенная по формуле (3.2) (кривая *1*). Как видно из графика экспериментальная кривая крутильной жесткости шлицевого соединения не проходит через нуль, а пересекает ось φ в некоторой точке φ_0. Это объясняется тем, что крутильная жесткость реального шлицевого соединения [формула б] зависит от коэффициента неравномерности нагружения шлицов.

Отсутствие данных о точности изготовления испытанных шлицевых муфт не позволяет учесть качество изготовления шлицевых венцов при определении крутильной жесткости шлицевого соединения. Поэтому для качественной оценки результатов экспе-

римента зададимся некоторой погрешностью шлицевых венцов. Структурная формула для коэффициента неравномерности нагружения шлицов имеет вид

$$K_{\text{нер}} = 1 + \frac{\Delta t_{\Sigma}}{\Delta_{\text{ш}}},$$

где Δt_{Σ} — амплитуда суммарной кривой накопленных погрешностей окружных шагов сопряженных шлицевых венцов, *мк*; $\Delta_{\text{ш}}$ — средняя величина упругой деформации пары шлицов, *мк*. Предполагая, что погрешность окружных шагов определяется только радиальным биением заготовки на станке, и приняв $\Delta t_{\Sigma} = \Delta e = 15$ *мк*, получим, что крутильная жесткость реального шлицевого соединения зависит от передаваемого крутящего момента и определяется по формуле

$$C_{\text{кр. ш. реал}} = C_{\text{кр. ш}}/K_{\text{нер}} = 12{,}8 \cdot 10^6 \Big/ \left(1 + \frac{15}{\Delta_{\text{ш}}}\right) \text{кГсм/рад}. \quad (3.3)$$

На рис. 23 нанесена кривая $\omega = f(M)$, построенная по формуле (3.3) (кривая *2*), которая хорошо совпадает с экспериментальными точками. Таким образом, расчетная величина жесткости шлицов (1) хорошо соответствует экспериментальным значениям угла относительного поворота шлицевых венцов, полученным в работе [10].

В работе [85] на модели шлицевой муфты проведены обширные исследования распределения нагрузки между шлицами в зависимости от крутящего момента, прикладываемого к шлицевому соединению, и перекоса осей муфт. Тензометрический метод исследования, при котором в основании шлицов со стороны двух торцов наклеивали тензодатчики сопротивления, дал возможность определить распределение нагрузки между шлицами. Жесткость шлицов в этой работе определена косвенным путем на основании пересчета нагрузок, измеренных на шлицах, в величины упругих деформаций шлицов.

Примененный в работе [85] косвенный метод определения деформации шлицов не может дать надежных результатов.

Во-первых, принятая расчетная схема для определения составляющих суммарной деформации шлицов не учитывает таких компонент, как деформация прилежащей к шлицу части обода шлицевой муфты, изгибная деформация шлица как защемленной пластинки, на торце которой действует нагрузка, деформация обода шлицевой муфты. Поэтому основное положение автора о преобладающем влиянии контактной составляющей суммарной деформации шлицов вызывает серьезные возражения.

Во-вторых, положение автора о преобладающем влиянии контактной деформации шлицов привело к тому, что на основе обработки экспериментальных данных по распределению нагрузки между шлицами была определена величина коэффициента k,

входящего в формулу для контактной деформации шлицов (2.9). Естественно, что это привело к завышению контактной деформации шлицов, поскольку в нее оказались включенными неучтенные составляющие деформации шлицов. В реальных условиях эксперимента они существенно влияли на распределение нагрузки между шлицами (деформация прилежащей к шлицу части обода шлицевой муфты, деформация обода шлицевой муфты).

В-третьих, полученный экспериментальным путем закон распределения нагрузки между шлицами связан не столько с деформацией самих шлицов, сколько с деформацией обода муфты с внутренними зубьями. Действительно, как видно из экспериментальных кривых распределения нагрузки между шлицами, они соответствуют более равномерному распределению нагрузки, чем это следует из кривых зазоров между шлицами, обусловленных перекосом осей муфт. Это может быть объяснено только упругой деформацией обода зубчатой муфты.

Поэтому экспериментальные данные работы [85] не позволяют в чистом виде выделить упругую деформацию шлицов, поскольку распределение нагрузки между шлицами определяется совместным влиянием упругих деформаций ободьев шлицевых муфт и самих шлицов.

В работе [8] был разработан тензометрический метод определения упругой деформации шлицов, суть которого заключается в нахождении зазоров между шлицами, обусловленными погрешностями шлицевых венцов по окружным шагам, с последующим тензометрированием шлицов в соединении.

Распределение нагрузки между шлицами определяется зазорами в шлицевом соединении, зависящими от точности изготовления шлицевых венцов, упругих деформаций шлицов и ободьев муфт.

Кривая накопленных погрешностей окружных шагов шлицевого венца показывает, на каком расстоянии от теоретически точного положения находится рассматриваемый шлиц. Поэтому, если взять разность между кривыми накопленных погрешностей окружных шагов внутреннего и наружного шлицевых венцов, то она определит кривую взаимного положения шлицов в данном собранном состоянии, т. е. кривую зазоров в шлицевом соединении.

Подвод крутящего момента к шлицевому соединению, например, уравнительного механизма эпицикла от сателлитов, приводит к перегрузке групп шлицов, в связи с упругим деформированием ободьев муфт, в сечениях, где действуют усилия от сателлитов. Поэтому на исходную кривую зазоров (определяемую погрешностями изготовления шлицевых венцов и способом их сочетания в соединении) накладывается волна (с числом периодов, равным числу сателлитов), зависящая от деформативности элементов уравнительного механизма.

Исследованию было подвергнуто шлицевое соединение эпицикл — блокирующая муфта, имеющее следующие параметры $m_n = 3$ *мм*, $z = 174$, $\beta_0 = 17°$, $f_0 = 1{,}0$, $c = 0{,}25$, $\alpha_{оп} = 20°$.

Тензодатчики с базой $l = 5$ *мм* и сопротивлением $R = 104$ *ом* наклеивались на торцевую поверхность муфты в зоне выкружки шлицов. Место наклейки датчиков выбирали так, чтобы ось датчиков была параллельна касательной к переходной кривой, проведенной через ее среднюю точку. При этом край датчика находился на расстоянии 1 *мм* от профиля переходной кривой шлица.

Построенные обычным путем кривые накопленных погрешностей окружных шагов перестраивались в кривые зазоров для трех различных сочетаний венцов в соединение: 1) некотором произвольном положении, 2) лучшем положении, в котором величина среднего зазора в соединении была минимальной, 3) худшем положении, в котором величина среднего зазора в соединении была максимальной.

Полученные кривые показали, что способ сочетания шлицевых венцов в соединение оказывает значительное влияние на зазоры между шлицами. Даже при высоком уровне точности изготовления шлицевых венцов представляется возможность добиться существенного выравнивания нагрузки исключительно сборкой шлицевых венцов в соединение.

После построения кривой зазоров в шлицевом соединении, зная исходную величину зазора в паре шлицов, которая тензометрируется, можно определить распределение нагрузки между шлицами и жесткость шлицов и ободьев муфт. Так как для пары шлицов, находящейся на угловом расстоянии θ от сечения, где приложены усилия от сателлитов, жесткость шлицов $C_ш$ и деформация муфт $\Delta_ш$ могут быть приняты постоянными величинами, то, исследуя показания тензодатчика для фиксированного значения угла θ, представится возможность выявить зависимость $P_ш = f(S_i)$ в соответствии с формулой

$$P_i = C_ш(\Delta_0 - S_i), \tag{3.4}$$

где P_i—нагрузка в i-й паре шлицов, Δ_0 — деформация наиболее нагруженной пары шлицов, S_i — исходный зазор в i-ой паре шлицов.

Формула (3.4) получена из предположения линейной зависимости нагрузки от зазоров в шлицах. Величина периодической деформации ободьев муфт $\Delta_м$ может быть найдена из сопоставления кривых деформации шлицов при различных углах θ. Осесимметричная деформация ободьев муфт $\Delta_{ом}$ и деформация шлицов Δ_0 могут быть определены из кривых деформаций тензодатчиков для значений $\theta = 0$ и $S_i = 0$.

Поскольку число шлицов, на которые наклеивали тензодатчики, было ограничено, то шлицевые соединения испытывали при различных сочетаниях шлицевых венцов, что позволило с одного и того же датчика получить информацию при различных величинах зазоров. Экспериментально было установлено, что независимо от величины исходного зазора между шлицами, деформация

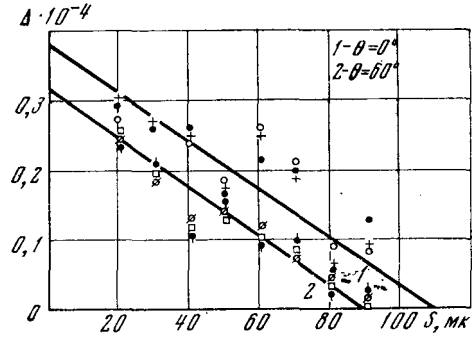


Рис. 24. Зависимость показаний тензодатчиков S_i от величины исходного зазора между шлицами S_i

тензодатчиков линейно зависела от нагрузки, приложенной к шлицевому соединению

$$\delta_P = K_{Pi}P.$$

Это дает основание принять также линейную зависимость между деформацией шлица и показаниями установленного на него тензодатчика

$$\Delta_i = K_\delta \delta_i, \tag{3.5}$$

где K_δ — коэффициент пропорциональности, зависящий от места наклейки и параметров тензодатчика.

В соответствии с (3.4) формула (3.5) может быть записана в следующем виде

$$\delta_i = \frac{1}{K_\delta}(\Delta_0 - S_i). \tag{3.6}$$

Эта формула устанавливает связь между показаниями тензодатчика δ_i и начальным зазором между шлицами S_i. На рис. 24 приведены экспериментальные данные, характеризующие связь между Δ_i и S_i в момент прохождения через сечение шлица сателлита ($\theta = 0°$) и в момент расположения шлица между соседними сателлитами ($\theta = 60°$). Приведенные экспериментальные точки показывают, что между указанными величинами существует линейная зависимость. Разброс экспериментальных данных объясняется, с одной стороны, погрешностью определения окружных шагов, поскольку измеряемые шлицевые венцы имели в некоторых случаях контактные разрушения, а с другой — неравномерным нагружением сателлитов, вызвавшим неравномерное деформирование шлицевого соединения.

Таким образом, установленная экспериментальным путем линейная зависимость между деформацией шлицов и величиной начального зазора подтверждает правильность линейной зависимости для нагрузок на шлицах вида (3.4). Это дает возможность по результатам тензометрирования шлицевых соединений использо-

вать расчетно-экспериментальный метод определения упругой деформации шлицевого соединения.

Статистическая обработка результатов тензометрирования шлицевого соединения эпицикл—блокирующая муфта по методу наименьших квадратов установила, что между показаниями тензодатчиков δ_i и начальным зазором S_i существует следующая линейная зависимость:

при $\theta = 0°$

$$\delta_i(0) = 0{,}35 \cdot 10^{-6}(108{,}5 - S_i), \tag{3.7}$$

при $\theta = 60°$

$$\delta_i(60) = 0{,}35 \cdot 10^{-6}(91{,}5 - S_i). \tag{3.8}$$

Сравнивая зависимости (3.7) и (3.6), найдем величину наиболее нагруженной пары шлицов ($S_i = 0$): при $\theta = 0°$

$$\Delta_0(0°) = 108{,}5\ мк, \tag{3.9}$$

при $\theta = 60°$

$$\Delta_0(60°) = 91{,}5\ мк. \tag{3.10}$$

Поскольку в момент прохождения сателлита через сечение, где установлен тензодатчик ($\theta = 0°$), шлиц претерпевал деформацию, обусловленную его жесткостью и податливостью шлицевых муфт, а в момент расположения тензометрируемого шлица между соседними сателлитами ($\theta = 60°$) периодическая составляющая ободьев муфт $\Delta_м$ имела противоположный знак, то из (3.9) и (3.10) получим уравнения

$$\Delta_0 + \Delta_{ом} + \Delta_м = 108{,}5; \quad \Delta_0 + \Delta_{ом} - \Delta_м = 91{,}5. \tag{3.11}$$

Решая систему (3.11), найдем

$$\Delta_0 + \Delta_{ом} = 100\ мк; \qquad \Delta_м = 8{,}5\ мк. \tag{3.12}$$

Таким образом, определяющими в суммарной деформации шлицевого соединения являются деформация шлицов Δ_0 и осесимметричная деформация муфт, периодическая же составляющая деформации муфт не достигает и 10% от суммарной деформации шлицевого соединения.

Для проведенного эксперимента средняя расчетная нагрузка на шлиц составила $\overline{P} = 9{,}33$ *кГ*, а средняя величина зазора в шлицевом соединении $\overline{S} = 60$ *мк*, т. е. средняя величина упругой деформации шлицов и муфты

$$\overline{\Delta} = \Delta_0 + \Delta_{ом} - S = 40\ мк.$$

Расчетное определение осесимметричной деформации обода блокирующей муфты показало, что она составляет $\Delta_{ом} = 12$ *мк*,

так что упругая деформация шлицов равна $\Delta_0 = 28$ *мк*. Расчетная величина упругой деформации пары шлицов значительно отличается от экспериментальной величины. Это объясняется, по-видимому, тем, что в исследованном редукторе была применена плавающая подвеска эпицикла, в связи с чем имели место относительные смещения профилей шлицов вследствие разной величины деформации ободьев эпицикла и блокирующей муфты.

В связи с этим изложенный расчетно-экспериментальный метод определения деформации шлицов целесообразно применять в модельных и стендовых условиях при наличии только упругих деформаций элементов шлицевого соединения.

II ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ОБОДЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС И ШЛИЦЕВЫХ МУФТ

Глава 4. ДЕФОРМАЦИЯ ОБОДЬЕВ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОЛЕС

При теоретических исследованиях зубчатых передач, связанных с расчетами на прочность и решением других задач, возникает необходимость определения деформативности ободьев зубчатых колес. Опыт показывает, что суммарная деформация зубчатого зацепления, измеренная вдоль линии зацепления, определяется не только деформацией самих зубьев, но и деформацией ободьев зубчатых колес [56].

Это особенно заметно в планетарных редукторах, зубчатые колеса которых (в первую очередь, эпицикл) выполняются в виде тонких колец, имеющих незначительную изгибную жесткость. В таких случаях деформация ободьев зубчатых колес становится определяющей в суммарной деформации зубчатого зацепления.

Все существующие методы расчета ободьев зубчатых колес на прочность и жесткость построены на базе теории изгиба балок малой кривизны. При этом предполагалось, что кольцо, заменяющее обод зубчатого колеса, нагружено во всех сечениях системой одинаковых сил. Это позволяло, ввиду симметрии, рассматривать только часть кольца, что значительно облегчало расчет.

Неравномерность нагружения сателлитов в планетарных механизмах приводит к тому, что на центральное колесо в различных сечениях действуют неодинаковые нагрузки. Существующие методы расчета не позволяют рассчитать ободья центральных колес на прочность и жесткость с учетом неравномерности распределения нагрузки между сателлитами. Между тем именно неравномерное деформирование ободьев центральных колес приводит к более благоприятному распределению нагрузки по параллельным потокам мощности. Поэтому необходимо иметь расчетный метод определения жесткости ободьев центральных колес, который позволил бы учитывать неодинаковую нагруженность сателлитов.

В современных планетарных механизмах обод эпицикла в некоторых случаях имеет вид тонкого кольца, соединенного с оболочкой [39]. Обычно такую же конфигурацию придают ободу солнечной шестерни. Это вызвано тем, что с целью увеличения

эффективности плавающей подвески солнечной шестерни стремятся развить осевые размеры солнечной шестерни, увеличивая базу уравнителя. Условия деформирования центральных колес такой конфигурации значительно отличаются от условий деформирования колес кольцевой формы.

Таким образом, при расчете деформативности ободьев центральных колес планетарных механизмов кольцевой и составной конструкций необходимо учитывать неравномерное нагружение сателлитов.

§ 1. Метод элементарной нагрузки

Обод эпицикла современного планетарного редуктора выполняется в виде тонкого кольца с внутренним зубчатым и наружным шлицевым венцами. Шлицевый венец обычно предусматривается для соединения эпицикла с сопряженными деталями (рис. 25). При другом конструктивном исполнении эпицикла [39] расчетная схема эпицикла имеет вид кольца, соединенного с тонкой упругой оболочкой (рис. 26).

Эпицикл нагружен силами от z_c зубчатых зацеплений сателлит—эпицикл, которые уравновешиваются усилиями, возникающими в шлицевом соединении эпицикл—блокирующая муфта (рис. 25) или же реактивными усилиями в месте сопряжения оболочки с соседней деталью (рис. 26).

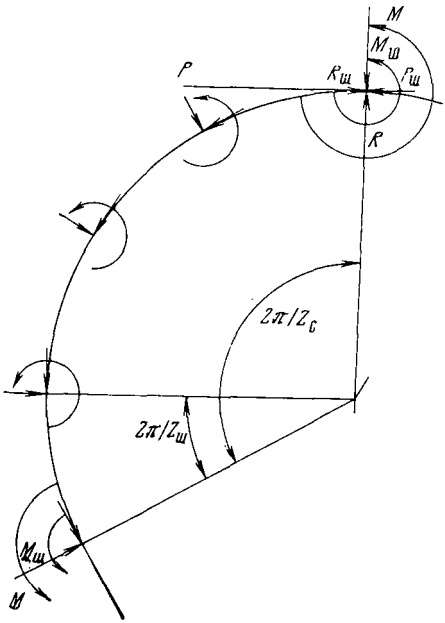
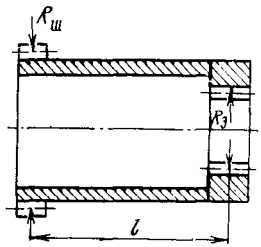


Рис. 25. Расчетная схема эпицикла в виде тонкого упругого кольца

Рис. 26. Расчетная схема эпицикла в виде кольца, соединенного с тонкой упругой оболочкой



При решении задачи о деформации обода эпицикла, выполненного по схеме рис. 25, будем рассматривать его как тонкое кольцо, толщиной h_0, равной наименьшей толщине сечения эпицикла (рис. 27), и радиусом ρ, равным расстоянию центров тяжести сечений эпицикла до его оси. Считаем, что кольцо подвержено действию усилий от зубчатых зацеплений в z_c равномерно расположенных по окружности точках и в $z_ш$ точках — реактивных усилий от шлицевого соединения эпицикл—блокирующая муфта. Под действием этой системы сил кольцо находится в равновесии.

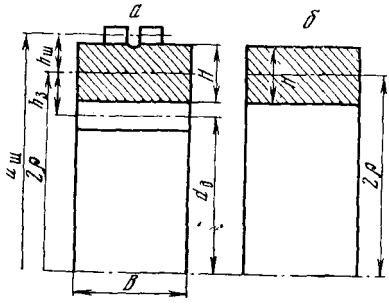


Рис. 27. Сечение эпицикла (*а*) и кольца, его заменяющего (*б*)

Рассмотрим усилия, действующие на кольцо.

В z_c точках действуют усилия от зубчатых зацеплений сателлиты—эпицикл:

тангенциальная сила $P = 2\ M_{кр}/z_c d_д$,

радиальная сила $R = P \operatorname{tg} \alpha_s$,

осевая сила $Q = P \operatorname{tg} \beta_д$,

изгибающий момент $M_з = Ph_з$,

крутящий момент $M_к = Qh_з$,

где $M_{кр}$ — крутящий момент, передаваемый зубчатыми зацеплениями сателлиты-эпицикл, $d_д$ —диаметр делительной окружности зубчатого венца эпицикла, $\alpha_з$ —угол зацепления в зубчатом зацеплении в торцевой плоскости, $h_з$ — плечо приложения сил P и Q, т. е. расстояние от точки приложения сил на профиле зуба зубчатого венца до окружности центров тяжести сечения эпицикла (рис. 27).

Наличие осевых сил Q, связанное с тем, что зубчатые венцы имеют косой зуб, приводит к неплоской деформации эпицикла. Появление крутящего $M_к = Qh_з$ и изгибающего $M_з = Ph_з$ моментов обусловлено внецентровым приложением усилий от зубьев к ободу эпицикла.

В $z_ш$ точках действуют усилия от шлицевого соединения эпицикл — блокирующая муфта:

тангенциальная сила $P_{iш} = f(P,\ z_c,\ z_ш)$,

радиальная сила $R_{iш} = P_{iш} \operatorname{tg} \alpha_ш$,

осевая сила $Q_{iш} = P_{iш} \operatorname{tg} \beta_ш$,
изгибающий момент $M_{iш} = P_{iш} h_ш$,
крутящий момент $M_{кiш} = Q_{iш} h_ш$.

Нагрузка между шлицами распределяется неравномерно и зависит как от погрешностей изготовления шлицевых венцов по окружным шагам, так и от упругого деформирования ободьев эпицикла и блокирующей муфты. Закон изменения реактивной нагрузки в шлицах может быть записан в следующем виде:

$$P_{iш} = \bar{P}_ш + c_ш \left[\bar{s} \cdot \cos \frac{2\pi}{z_ш} (i - 1 + j) + \Delta_M \cdot \cos 2\pi \frac{z_c}{z_ш} \cdot i \right], \quad (1.1)$$

где $\bar{P}_ш$ — средняя (расчетная) нагрузка, приходящаяся на шлиц, $c_ш$ — жесткость пары шлицов, $\bar{s}$ — средняя величина зазора в шлицевом соединении эпицикл — блокирующая муфта, Δ_M — дополнительная деформация шлицов, обусловленная упругими деформациями элементов уравнительного механизма эпицикла, j — сдвиг по фазе, определяющий положение пары шлицов с нулевым начальным зазором по отношению к сателлиту.

Тангенциальная сила $P_{iш}$ найдется из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси кольца

$$M_з \cdot z_c + \sum_{i=1}^{z_ш} M_{iш} + \sum_{i=1}^{z_ш} P_{iш} (\rho + h_ш) - P \rho z_c = 0.$$

Это уравнение может быть переписано в следующем виде

$$- P \left(1 - \frac{h_з}{\rho} \right) z_c + \left(1 + \frac{h_ш}{\rho} \right) \sum_{i=1}^{z_ш} P_{iш} = 0. \quad (1.2)$$

Сумма всех сил $P_{iш}$ равна

$$\sum_{i=1}^{z_ш} P_{iш} = \bar{P}_ш / z_ш,$$

что с учетом (1.2) дает

$$\bar{P}_ш = P \frac{1 - \frac{h_з}{\rho}}{1 + \frac{h_ш}{\rho}} \cdot \frac{z_c}{z_ш} = k_ш P. \quad (1.3)$$

Тангенциальная сила $P_{iш}$ в шлицах может быть выражена через усилия в зубчатом зацеплении в виде

$$P_{iш} = P k_ш \left[1 + \frac{s}{\Delta_ш} \cos \frac{2\pi}{z_ш} (i - 1 + j) + \frac{\Delta_M}{\Delta_ш} \cos 2\pi \frac{z_c}{z_ш} \cdot i \right]. \quad (1.4)$$

Поскольку число шлицов $z_ш$ значительно больше числа сателлитов z_c, будем считать, что после переноса всех сил от зубчатых зацеплений и шлицевого соединения на нейтральную ось эпицикла, точка приложения сил от одного из зубьев совпадает с точкой приложения сил от одного из шлицов. Угловая координата этого сечения кольца в дальнейшем принимается за нулевую.

При решении задачи о деформации обода эпицикла, выполненного по схеме рис. 26, будем рассматривать его как кольцо с присоединенной тонкой упругой оболочкой. Считаем, что кольцо соединено с оболочкой по среднему радиусу ρ кольца. Система внешних сил, приложенных к кольцу, остается прежней и может быть в общем случае сведена к трем силам и трем моментам.

В случае, когда кольцо нагружено системой взаимно уравновешенных сосредоточенных сил, нет надобности интегрировать дифференциальные уравнения равновесия кольца, а можно воспользоваться методом наложения элементарных нагрузок, суть которого заключается в следующем [17, 53, 57].

Если кольцо, нагруженное системой сосредоточенных сил, соединено со свободной безмоментной цилиндрической оболочкой, то в месте сопряжения кольца с оболочкой возникают уравновешивающие нагрузки, касательные к нейтральной линии кольца и направленные по бинормали к ней, распределенные по радиусу сопряжения кольца с оболочкой. Таким образом, в общем случае нагружения кольца системой пространственных сил необходимо учитывать шесть элементарных нагрузок [57].

Если совокупность внешних сосредоточенных сил является взаимно уравновешенной, то распределенные нагрузки не оказывают никакого влияния на изгиб кольца. Поэтому для учета суммарного влияния на кольцо любой совокупности взаимно уравновешенных сосредоточенных сил достаточно просуммировать влияние соответствующих распределенных нагрузок q_i и p_i, относящихся к каждой из этих сил.

Для распределенных нагрузок q_i и p_i получены готовые решения [53, 57], которые представлены в табл. 5—8 в рядах Фурье. В табл. 5 и 6 приведены внутренние силовые факторы, которые возникают в кольце под действием элементарных нагрузок. Общее выражение для некоторого силового фактора имеет вид

$$N = K_{NQ} \frac{Q}{\pi}, \tag{1.5}$$

где N — соответствующий внутренний силовой фактор; Q — соответствующее внешнее усилие.

В табл. 7 и 8 приведены элементы упругой линии кольца под действием элементарных нагрузок. Общее выражение для некоторого элемента упругой линии кольца имеет вид

$$u = K_{uQ} \frac{Q\rho^3}{\pi EI}, \tag{1.6}$$

Таблица 5

Внутреннее усилие	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_{и1}$
Перерезывающая сила, Q_1	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]$	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-1\right]$	$\frac{1}{2}[1+2\cos\theta]$
Нормальная сила, N	$-\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\right]$	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]$	$-\sin\theta$
Изгибающий момент, M_1/ρ	$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\cos\theta-(\pi-\theta)\sin\theta\right]$	$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sin\theta-(\pi-\theta)(1-\cos\theta)\right]$	$\frac{1}{2}[(\pi-\theta)-2\sin\theta]$

Таблица 6

Внутреннее усилие	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_{и2}$	Крутящий момент, $M_к$
Перерезывающая сила, Q_2	$\frac{1}{2}[(\pi-\theta)-2\sin\theta]$	$\frac{1}{2}[1+2\cos\theta]$	$\sin\theta$
Изгибающий момент, M_2/ρ	$-\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-1\right]$	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]$	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-3\lambda}{1+\lambda}\cos\theta\right]$
Крутящий момент, M/ρ	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)(1-\cos\theta)-\frac{3}{2}\sin\theta\right]$	$-\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-1\right]$	$\frac{1}{2}\left[(\pi-\theta)\cos\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\lambda}{1+\lambda}\sin\theta\right]$

Таблица 7

Перемещение	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент $M_{и1}/\rho$
Радиальное, w	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n(n^2-1)}$
Тангенциальное, v	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2(n^2-1)^2}$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$
Угол поворота сечения $\gamma\rho$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n(n^2-1)}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}$

Таблица 8

Перемещение	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_{и2}/\rho$	Крутящий момент, $M_к/\rho$
Осевое, u	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2+\lambda)\cos n\theta}{n^2(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2+\lambda)\sin n\theta}{(n^2-1)^2}$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\lambda)\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$
Угол поворота сечения, $\psi\rho$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2+\lambda)\sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2+\lambda)\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1+\lambda)\sin n\theta}{(n^2-1)^2}$
Угол поворота сечения, $\vartheta\rho$	$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\lambda)\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1+\lambda)\sin n\theta}{(n^2-1)^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+n^2\lambda)\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$

где u — соответствующий элемент упругой линии кольца, I — момент инерции сечения кольца относительно соответствующей оси.

Окончательные выражения для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии кольца имеют вид

$$Q_1 = \frac{1}{\pi}\left[Rm_{QR}(\theta) + P\cdot m_{QP}(\theta) + \frac{M_{u1}}{\rho} m_{QM_1}(\theta)\right], \tag{1.7}$$

$$u_1 = \frac{\rho^3}{\pi EI}\left[Rm_{u,R}(\theta) + P\cdot m_{u,P}(\theta) + \frac{M_{ш}}{\rho} m_{u,M}(\theta)\right] \tag{1.8}$$

и

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\left[Qm_{Q_2Q}(\theta) + \frac{M_{u_2}}{\rho} m_{Q_2M_2}(\theta) + \frac{M_к}{\rho} m_{Q_2M_к}(\theta)\right],$$

$$u_2 = \frac{\rho^3}{\pi EI}\left[Qm_{u_2Q}(\theta) + \frac{M_{u_2}}{\rho} m_{u_2M_2}(\theta) + \frac{M_к}{\rho} m_{u_2M_к}(\theta)\right].$$

где Q_1, u_1 — внутренние силовые факторы и элементы упругой линии в плоскости кольца, Q_2, u_2 — внутренние силовые факторы и элементы упругой линии, перпендикулярные к плоскости кольца.

Суммируя действие отдельных усилий, получим для общего случая, когда кольцо загружено любой совокупностью взаимноуравновешенных сосредоточенных сил и моментов, следующие выражения для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии кольца

$$Q_{\Sigma 1} = \frac{1}{\pi} \sum_i \left[R_i m_{Q_1 R}(\theta - \varphi_i) + P_i m_{Q_1 P}(\theta - \varphi_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{M_{1i}}{\rho} m_{Q_1 M_1}(\theta - \varphi_i) \right], \tag{1.9}$$

$$u_{\Sigma 1} = \frac{\rho^3}{\pi EI} \sum_i \left[R_i m_{u_1 R}(\theta - \varphi_i) + P_i m_{u_1 P}(\theta - \varphi_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{M_{1i}}{\rho} m_{u_1 M_1}(\theta - \varphi_i) \right]$$

и

$$Q_{\Sigma_2} = \frac{1}{\pi} \sum_i \left[Q_i m_{Q_2 Q}(\theta - \varphi_i) + \frac{M_{u_2 i}}{\rho} m_{Q_2 M_2}(\theta - \varphi_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{M_k}{\rho} m_{Q_2 M_k}(\theta - \varphi_i) \right], \tag{1.10}$$

$$u_{\Sigma 2} = \frac{\rho^3}{\pi EI} \sum_i \left[Q_i m_{u_2 Q}(\theta - \varphi_i) + \frac{M_{u_2 i}}{\rho} m_{u_2 M_2}(\theta - \varphi_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{M_{\text{к}}}{\rho} m_{u_2 M_{\text{к}}}(\theta - \varphi_i) \right].$$

Системой уравнений (1.8—1.10) полностью решается задача о статической неопределимости и нахождения деформации замкнутого кругового кольца, нагруженного системой сосредоточенных сил и моментов.

В приведенных формулах и табл. 7, 8 принято следующее правило знаков: радиальные силы R_i считаются положительными, если они направлены к центру кольца; тангенциальные силы P_i положительны, если они направлены в сторону уменьшения угла θ; изгибающие моменты M_{u1} положительны, если они увеличивают угол θ, радиальное перемещение w положительно при перемещении рассматриваемой точки кольца по направлению к его центру; тангенциальное перемещение v положительно при перемещении рассматриваемой точки кольца в сторону увеличения угла θ; угол поворота сечения γ положителен, если при повороте сечения увеличивается угол θ. Углы θ и φ_i отсчитываются от любой фиксированной точки кольца, причем через θ обозначена угловая координата того сечения кольца, для которого находятся внут-

Таблица 9

Внутреннее усилие	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_{\text{ц}1}/\rho$
Перерезывающая сила, Q_1	$k_{Q_1R} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot C_n \cdot \sin n\theta}{(n^2-1)}$	$k_{Q_1P} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cdot \cos n\theta}{(n^2-1)}$	$k_{Q_1M_1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot \cos n\theta$
Нормальная сила, N	$k_{NR} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \cdot C_n \cdot \cos n\theta}{(n^2-1)}$	$k_{NP} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot C_n \cdot \sin n\theta}{(n^2-1)}$	$k_{NM_1} - \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot C_n \cdot \sin n\theta$
Изгибающий момент, M_1/ρ	$k_{M_1R} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cdot \cos n\theta}{(n^2-1)}$	$k_{M_1P} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cdot \sin n\theta}{n(n^2-1)}$	$k_{M_1M_1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cdot \sin n\theta}{n}$

Таблица 10

Внутреннее усилие	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, M_{u2}/ρ	Крутящий момент, $M_{\text{к}}/\rho$
Перерезывающая сила, Q_2	$k_{Q_2Q} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^2+\lambda)}{n} \cdot \sin n\theta$	$k_{Q_2M_2} - \sum_{n=2}^{\infty} C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda] \cos n\theta$	$k_{Q_2M_k} + \sum_{n=2}^{\infty} (1+\lambda) C'_n \cdot n \cdot \sin n\theta$
Изгибающий момент, M_2/ρ	$k_{M_2Q} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)} \cdot \cos n\theta$	$k_{M_2M_2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda]n}{(n^2-1)} \cdot \sin n\theta$	$k_{M_2M_k} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\lambda)}{(n^2-1)} \cdot C'_n \cdot n^2 \cdot \cos n\theta$
Крутящий момент, M/ρ	$k_{MQ} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^2+\lambda)}{n(n^2-1)} \cdot \sin n\theta$	$k_{MM_2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda]}{(n^2-1)} \cdot \cos n\theta$	$k_{MM_k} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\lambda)}{(n^2-1)} \cdot C'_n \cdot n \cdot \sin n\theta$

ренние силовые факторы и элементы упругой линии кольца, а через φ_i — угловая координата той точки кольца, в которой приложены внешние усилия Q_{1i} и Q_{2i}. Положительное направление углов θ и φ_i принято по часовой стрелке.

Для эпицикла, имеющего конфигурацию рис. 26, изложенный метод элементарной нагрузки не может быть использован. Для расчета на прочность и жесткость обода эпицикла, выполненного в виде кольца (зубчатого венца), соединенного с тонкой упругой оболочкой (рис. 26), можно воспользоваться готовыми решениями для случая нагружения кольца сосредоточенными силами [57]. В табл. 9 и 10 приведены формулы для внутренних силовых факторов, которые возникают в кольце под действием сосредоточенных сил. Общее выражение для некоторого внутреннего силового фактора по-прежнему имеет вид (5).

Входящие в формулы табл. 9 и 10 коэффициенты имеют следующий вид

$$C_n = \frac{a_2}{n_2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + a_1) + a_2},$$

$$C_n' = \frac{(n^2 + a_3)}{(n^2 + \lambda)(n^2 + a_3) + n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + 4a_3) a_4},$$

$$a_1 = 12E_0\rho^2/G_0 l^2, \quad a_2 = 12E_0 h_0 \rho^6/EI_1 l^3,$$

$$a_3 = a_1/4, \qquad a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{EI_2 l^3}{E_0 h_0 R^4},$$

где l, h_0 — длина и толщина оболочки, E_0, G_0 — модуль упругости первого и второго рода материала оболочки, E, G — модуль упругости первого и второго рода материала кольца, I_1, I_2 — моменты инерции сечения кольца относительно осей перпендикулярной и лежащей в его плоскости, $I_к$ — момент инерции кручения сечения кольца, $\lambda = EI_2/GI_k$ — отношение жесткостей.

При выводе формул принималось, что кольцо тонкое и нерастяжимое; одна из главных осей сечения кольца лежит в его плоскости; оболочка — тонкая, безмоментная, заделанная на одном торце, соединена с кольцом по его среднему радиусу. Предполагалось, что при действии нагрузок в плоскости кольца оно абсолютно жесткое из своей плоскости, а при действии нагрузок перпендикулярно к плоскости кольца оно абсолютно жесткое в своей плоскости.

Подставляя внутренние силовые факторы из табл. 9 и 10 в дифференциальные уравнения упругой линии кольца, найдем элементы упругой линии кольца под действием различных сосредоточенных нагрузок. В табл. 11 и 12 приведены значения элементов упругой линии кольца. Общее выражение для некоторого элемента упругой линии кольца имеет вид (6), так что в таблицах приведены значения соответствующих коэффициентов упругих перемещений кольца.

Таблица 11

Перемещение	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_{И1}/\rho$
Радиальное, w	$k_{wR} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{(n^2-1)^2}$	$k_{wP} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$k_{wM_1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \sin n\theta}{n(n^2-1)}$
Тангенциальное, v	$k_{vR} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$k_{vP} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{n^2(n^2-1)^2}$	$k_{vM_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$
Угол поворота сечения, $\gamma\rho$	$k_{\gamma R} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \sin n\theta}{n(n^2-1)}$	$k_{\gamma P} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$	$k_{\gamma M_1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} \cos n\theta$

Таблица 12

Перемещение	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, M_{u2}/ρ	Крутящий момент, $M_К/\rho$
Осевое перемещение, u	$k_{uQ} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^4-\lambda^2)}{n^2(n^2-1)^2} \cos n\theta$	$k_{uM_2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda]}{n(n^2-1)^2} \sin n\theta$	$k_{uM_k} + (1+\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \cos n\theta$
Угол поворота сечения, $\psi\rho$	$k_{\psi Q} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n(n^4-\lambda^2)}{n(n^2-1)^2} \sin n\theta$	$k_{\psi M_2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda](n^2-\lambda)}{(n^2-1)^2} \cos n\theta$	$k_{\psi M_k} - (1+\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \sin n\theta$
Угол поворота сечения, $\vartheta\rho$	$k_{\vartheta Q} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\lambda)C'_n \cdot (n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \cos n\theta$	$k_{\vartheta M_2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\lambda)C'_n[n^2(1+2\lambda)-\lambda]}{(n^2-1)^2} \sin n\theta$	$k_{\vartheta M_k} - (1+\lambda)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C'_n \cdot n^2}{(n^2-1)^2} \cos n\theta$

Структурные формулы для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии кольца, а также общие формулы для произвольной системы сосредоточенных сил, действующих на кольцо, в данном случае также имеют вид (7) — (10).

Таким образом, применение приведенных выше формул позволяет рассчитывать ободья центральных колес кольцевой формы и кольца, соединенного с оболочкой, на прочность и жесткость при произвольной системе сосредоточенных сил. Такая задача возникает при решении задач, относящихся к распределению нагрузки по параллельным потокам мощности в планетарных механизмах. В некоторых случаях, однако, достаточно располагать расчетными формулами при условии, что внешние нагрузки, действующие в зубчатых зацеплениях сателлитов с центральными колесами, равны между собой.

При равных нагрузках необходимо рассмотреть кольцо под действием периодической системы сил. В этом случае расчетные формулы принимают достаточно компактный вид.

§ 2. Симметричная деформация центрального колеса

Рассматривая деформированное состояние обода центрального колеса кольцевой формы, необходимо учитывать усилия от зубчатых зацеплений сателлиты—центральное колесо и шлицевого соединения между центральным колесом и сопряженной деталью. Совместное действие сил от зубчатых зацеплений и шлицевого соединения можно учесть суммированием влияний на деформацию обода центрального колеса обеих групп нагрузок:

$$Q_{\Sigma} = Q_{13} + Q_{23} + Q_{1ш} + Q_{2ш},$$
$$u_{\Sigma} = u_{13} + u_{23} + u_{1ш} + u_{2ш}. \qquad (2.1)$$

В этих формулах индексом 1 обозначены величины, определенные в предположении равномерного распределения нагрузки по сателлитам (шлицам), а индексом 2 — неравномерного распределения нагрузки. Поскольку закон распределения нагрузки по шлицам записан в аналитической форме (1.1), то определение последних слагаемых в формулах (2.1) с помощью формул (1.9) и (1.10) не составит труда.

Определение в общем виде вторых слагаемых в формулах (2.1) не представляется возможным, так как, во-первых, при проектировании планетарного механизма величина перегрузки сателлитов задана быть не может, а, во-вторых, в общем случае не известен закон распределения нагрузки по сателлитам. Поэтому для определения вторых слагаемых в формулах (2.1) необходимо задаться аналитической формой закона распределения нагрузки по сателлитам.

Поскольку неравномерное нагружение сателлитов обусловлено проявлением первичных погрешностей деталей, которые имеют случайную природу, то, задаваясь некоторым распределением этих случайных величин, можно получить также некоторое вероятное деформированное состояние обода центрального колеса. На практике, однако, интерес представляет максимальная величина неравномерности деформирования обода центрального колеса, которая может быть определена по формулам (2.1) после соответствующего анализа первичных погрешностей деталей планетарного механизма и выбора наиболее неблагоприятного сочетания этих погрешностей.

Рассмотрим первые слагаемые в формулах (2.1), соответствующие равномерному распределению нагрузки по сателлитам. Выполняя необходимые преобразования, получим окончательные выражения для искомых величин:

$$Q_{13} = P\left(k_{QR}\,\mathrm{tg}\,\alpha_s + k_{QP} + k_{QM}\frac{h}{\rho}\right),$$
$$u_{13} = \frac{P\rho^3}{EI}\left(k_{uR}\,\mathrm{tg}\,\alpha_s + k_{uP} + k_{uM}\frac{h}{\rho}\right). \qquad (2.2)$$

Значения коэффициентов, входящих в формулы (2), полученные после суммирования (1.9) и (1.10) с учетом равномерного расположения сателлитов по окружности, представлены в табл. 13—16.

Особый интерес при расчете обода центрального колеса на прочность и жесткость представляют величины Q и u в точках приложения усилий от зубчатых зацеплений. Полагая в формулах табл. 13—16 $\theta = 0$, получим

$$Q_{13}^0 = P\left(k_{QR}^0\,\mathrm{tg}\,\alpha_s + k_{QP}^0 + k_{QM}^0\frac{h}{\rho}\right),$$
$$u_{13}^0 = \frac{P\rho^3}{EI}\left(k_{uR}^0\,\mathrm{tg}\,\alpha_s + k_{uP}^0 + k_{uM}^0\frac{h}{\rho}\right). \qquad (2.3)$$

Аналогичный вид имеют выражения для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии центрального колеса, выполненного в виде кольца, скрепленного с тонкой упругой оболочкой. Только в этом случае в формулах (2.1) два последних слагаемых, учитывающих нагрузки на шлицах, следует положить равными нулю. В табл. 17—20 приведены значения коэффициентов, входящих в формулы (2.2).

Рассмотрим теперь два последних слагаемых в формулах (2.1), связанных с действием реактивных усилий в шлицах. Третье слагаемое в этих формулах, характеризующее действие равномерной нагрузки на шлицах, может быть определено непосредственно из табл. 13—16, если в них положить $z = z_ш$. Оказывается, что равномерная реактивная нагрузка на шлицах практически не оказывает влияния (при большом числе шлицов) на элементы упругой линии кольца и на изгибающий момент в плоскости кольца.

Таблица 13

Внутреннее усилие	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_и$
Перерезывающая сила	$-\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\cdot\sin\pi/z}$	$-\frac{z}{2\pi}+\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$\frac{z}{2\pi}$
Нормальная сила	$-\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\cdot\sin\pi/z}$	$-\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	0
Изгибающий момент	$\frac{z}{2\pi}-\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$-\left[\frac{1}{2}+\frac{z}{2\pi}\theta+\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}\right]$	$\frac{1}{2}+\frac{z}{2\pi}\cdot\theta$

Таблица 14

Внутреннее усилие	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_и$	Крутящий момент, $M_к$
Перерезывающая сила	$\frac{1}{2}+\frac{z}{2\pi}\cdot\theta$	$\frac{z}{2\pi}$	0
Изгибающий момент	$\frac{z}{2\pi}-\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$-\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$
Крутящий момент	$\frac{1}{2}+\frac{z}{2\pi}\theta+\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$\frac{z}{2\pi}-\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$	$-\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{z}\right)}{2\sin\pi/z}$

Таблица 15

Перемещение	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Момент, $M_{И1}/\rho$
Радиальное, w	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{(n^2-1)^2}$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\sin n\theta}{n(n^2-1)}$
Тангенциальное, v	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\sin n\theta}{n(n^2-1)^2}$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{n^2(n^2-1)^2}$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$
Угол поворота сечения, $\gamma\rho$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\sin n\theta}{n(n^2-1)}$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{n^2(n^2-1)}$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{n^2}$

Таблица 16

Перемещение	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_{И2}/\rho$	Крутящий момент, $M_К/\rho$
Осевое перемещение, u	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(n^2+\lambda)}{n^2(n^2-1)^2}\cos n\theta$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2}\sin n\theta$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(1+\lambda)}{(n^2-1)^2}\cos n\theta$
Угол поворота сечения, $\psi\rho$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(n^2+\lambda)}{n(n^2-1)^2}\sin n\theta$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2}$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n n(1+\lambda)}{(n^2-1)^2}\sin n$
Угол поворота сечения, $\vartheta\rho$	$-z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(1+\lambda)}{(n^2-1)^2}\cos n\theta$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n n(1+\lambda)}{(n^2-1)^2}\sin n\theta$	$z\sum\limits_{n=kz}\frac{(-1)^n(1+n^2\lambda)}{(n^2-1)^2}\cos n\theta$

Таблица 17

Внутреннее усилие	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_{и1}/\rho$
Перерезывающая сила, Q_1	$k^c_{Q_1R} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n nC_n}{(n^2-1)} \sin n\theta$	$k^c_{Q_1P} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{(n^2-1)} \cos n\theta$	$k^c_{Q_1M_1} + z \sum\limits_{n=kz} (-1)^n C_n \cos n\theta$
Нормальная сила, N	$k^c_{NR} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n n^2C_n}{(n^2-1)} \cos n\theta$	$k^c_{NP} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n nC_n}{(n^2-1)} \sin n\theta$	$k^c_{NM_1} - z \sum\limits_{n=kz} (-1)^n nC_n \sin n\theta$
Изгибающий момент, M_1/ρ	$k^c_{M_1R} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{(n^2-1)} \cos n\theta$	$k^c_{M_1P} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n(n^2-1)} \sin n\theta$	$k^c_{M_1M_1} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n} \sin n\theta$

Таблица 18

Внутреннее усилие	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_{и2}/\rho$	Крутящий момент, $M_к/\rho$
Перерезывающая сила, Q_2	$k^c_{Q_2Q} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n(n^2+\lambda)}{n} \sin n\theta$	$k^c_{Q_2M_2} - z \sum\limits_{n=kz} (-1)^n C'_n[n^2(1+2\lambda) - \lambda] \cos n\theta$	$k^c_{Q_2M_k} + z \sum\limits_{n=kz} (-1)^n (1+\lambda) C'_n \times n \sin n\theta$
Изгибающий момент, M_2/ρ	$k^c_{M_2Q} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)} \cos n\theta$	$k^c_{M_2M_2} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n n}{(n^2-1)} [n^2(1+2\lambda) - \lambda] \sin n\theta$	$k^c_{M_2M_k} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n (1+\lambda)}{(n^2-1)} C'_n \times n^2 \cos n\theta$
Крутящий момент, M/ρ	$k^c_{MQ} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n(n^2+\lambda)}{n(n^2-1)} \sin n\theta$	$k^c_{MM_2} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n}{(n^2-1)} [n^2(1+2\lambda) - \lambda] \cos n\theta$	$k^c_{MM_k} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n (1+\lambda)}{(n^2-1)} C'_n \times n \sin n\theta$

Таблица 19

Перемещение	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_{и1}/\rho$
Радиальное, w	$k^c_{wR} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{(n^2-1)^2} \cos n\theta$	$k^c_{wP} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n(n^2-1)^2} \sin n\theta$	$k^c_{wM_1} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n(n^2-1)} \sin n\theta$
Тангенциальное, v	$k^c_{vR} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n(n^2-1)^2} \sin n\theta$	$k^c_{vP} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n^2(n^2-1)^2} \cos n\theta$	$k^c_{vM_1} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n^2(n^2-1)} \cos n\theta$
Угол поворота сечения, γ_ρ	$k^c_{\gamma R} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n(n^2-1)} \sin n\theta$	$k^c_{\gamma P} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n^2(n^2-1)} \cos n\theta$	$k^c_{\gamma M_1} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C_n}{n^2} \cos n\theta$

Таблица 20

Перемещение	Осевая сила, Q	Изгибающий момент, $M_{и2}/\rho$	Крутящий момент, $M_к/\rho$
Осевое перемещение, u	$k^c_{uQ} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n (n^4-\lambda^2)}{n^2(n^2-1)^2} \times \cos n\theta$	$k^c_{uM_2} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n}{n(n^2-1)^2} [n^2(1+2\lambda) - \lambda] \sin n\theta$	$k^c_{uM_k} + z(1+\lambda) \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n n^2}{(n^2-1)^2} \times \cos n\theta$
Угол поворота сечения, ψ_ρ	$k^c_{\psi Q} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n (n-\lambda^2)}{n(n^2-1)^2} \times \sin n\theta$	$k^c_{\psi M_2} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n}{(n^2-1)^2} [n^2(1+2\lambda) - \lambda] \cos n\theta$	$k^c_{\psi M_k} - z(1+\lambda) \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n n(n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \times \sin n\theta$
Угол поворота сечения, ϑ_ρ	$k^c_{\vartheta Q} + z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n (1-\lambda) C'_n (n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \times \cos n\theta$	$k^c_{\vartheta M_2} - z \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n (1-\lambda) C'_n}{(n^2-1)^2} [n^2(1+2\lambda) - \lambda] \sin n\theta$	$k^c_{\vartheta M_k} - z(1+\lambda) \sum\limits_{n=kz} \frac{(-1)^n C'_n (n^2+\lambda)}{(n^2-1)^2} \times \cos n\theta$

Например, равномерно распределенная радиальная нагрузка вызывает равномерное растяжение кольца, определяемое формулой [52]

$$w_{\text{ср}} = r_{\text{ср}} \Big/ \left(\frac{EF}{\rho^2} + \frac{EI_1}{\rho^4}\right), \tag{2.4}$$

где $r_{\text{ср}}$ — интенсивность равномерной радиальной нагрузки, EF, EI_1 — жесткость кольца на растяжение и изгиб.

Как показывают расчеты, величиной $w_{\text{ср}}$ при определении деформативности ободьев центральных колес можно пренебречь. Нормальная и перерезывающая силы при равномерном нагружении шлицов изменяются на величину

$$N_{1\text{ш}} = \frac{P}{2} k_{\text{ш}} \frac{z_{\text{ш}}}{\pi} \cdot \frac{h_{\text{ш}}}{\rho}, \qquad Q_{1\text{ш}} = \frac{P}{2} k_{\text{ш}} \frac{z_{\text{ш}}}{\pi} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}}. \tag{2.5}$$

Таким образом, системой уравнений (2.2) — (2.4) полностью решается задача о деформированном состоянии обода центрального колеса под действием равномерных усилий в зубчатых зацеплениях и шлицевом соединении.

Относительно определения последнего слагаемого в формулах (2.1), характеризующего *влияние неравномерной составляющей* реактивной нагрузки в шлицах, необходимо иметь в виду следующее. Для нахождения последних слагаемых (2.1) в выражения (1.9) и (1.10) следует ввести последние слагаемые из формулы (1.1) Нетрудно убедиться, что все интегралы, входящие в эти формулы, принимают ограниченные значения, поэтому поправки $Q_{2\text{ш}}$, $u_{2\text{ш}}$ будут малыми величинами по сравнению с $Q_{1\text{з}}$, $u_{1\text{з}}$, так как $P_{\text{шср}}$ с увеличением $z_{\text{ш}}$ стремится к нулю. В связи с этим можно сделать вывод, что при расчете на прочность обода центрального колеса влиянием реактивных усилий в шлицах можно пренебречь.

В тех случаях, когда необходимо учесть влияние неравномерных составляющих реактивной нагрузки в шлицах, можно поступить следующим образом. Косинусоидальная нагрузка, обусловленная погрешностями изготовления шлицевых венцов, может быть интерпретирована как дополнительная система сосредоточенных сил

$$P_{2\text{ш}} = Pk_{\text{ш}} \frac{\bar{S}}{\delta}, \quad R_{2\text{ш}} = Pk_{\text{ш}} \frac{\bar{S}}{\delta} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}}, \quad m_{2\text{ш}} = mk_{\text{ш}} \frac{\bar{S}}{\delta},$$

приложенных в сечении с координатой $\theta = \theta^*$. В таком случае действие каждой из сосредоточенных нагрузок может быть учтено непосредственно с помощью метода элементарных нагрузок, изложенного выше (см. табл. 5—8). Варьируя угол θ^*, можно оценить влияние неравномерного распределения нагрузки по шлицам, обусловленного погрешностями изготовления шлицевых венцов, на деформацию обода центрального колеса.

Что касается последнего слагаемого в формуле для нагрузки на шлицах, связанного с деформативностью сопрягаемых муфт,

то учет его не представляет труда, так как всякая периодическая нагрузка вида $\cos n\theta$ является самоуравновешенной системой сил, для которой имеются готовые решения [52].

В изложенном методе расчета обода эпицикла предполагалось, что внешние сосредоточенные силовые факторы действуют на нейтральной линии кольца, в действительности нагрузка от зубьев или шлицов передается на кольцо по участку конечной длины. Поэтому можно ожидать, что в сечениях, расположенных достаточно близко от нагруженных зубьев эпицикла, будет происходить изменение эпюры напряжений, связанное с местным возмущением поля напряжений от нагруженных зубьев.

Аналитическое решение этого вопроса представляет значительные трудности и может быть получено на основании ряда допущений, поэтому экспериментальное исследование должно было выявить действительную картину распределения изгибных напряжений по высоте сечения обода эпицикла.

При исследовании использовались проволочные датчики сопротивления, имевшие базу измерения $l = 5$ *мм* и активное сопротивление $R = 104$ *ом*. Тензодатчики наклеивали розетками в нескольких равномерно отстоящих друг от друга сечениях, при этом один датчик ориентировался в тангенциальном направлении, другой — в радиальном направлении, а третий — под углом 45° к первым двум. Ось тангенциального датчика одной из розеток совпадала со средней линией минимального сечения обода эпицикла, оси же тангенциальных датчиков двух других розеток располагались соответственно на 5 *мм* выше и ниже этой оси.

Тензометрирование эпициклов показало, что деформация радиальных датчиков ε_r значительно меньше деформации тангенциальных датчиков ε_θ, поэтому расчетная величина относительной деформации обода эпицикла в тангенциальном направлении может быть определена по формуле

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\frac{M_1}{I_1}y + \frac{M_2}{I_2}z + \frac{N}{F}\right). \qquad (2.6)$$

В зависимости от расположения тензодатчиков по высоте сечения эпицикла координата y принимает значения 0, +5 и —5 *мм*, а координата z для всех тензодатчиков равна половине ширины обода эпицикла $B/2$.

На рис. 28 приведены экспериментальная и расчетная эпюры относительной деформации тангенциального датчика ($y = 5$ *мм*, $K_I = 1$).

Некоторое превышение расчетных величин деформации над экспериментальными вызвано тем, что не приняты во внимание влияние наличия зубьев на жесткость обода эпицикла и более плавное нагружение эпицикла усилиями от зубчатых зацеплений по сравнению с сосредоточенными усилиями, принятыми при расчете эпицикла на прочность.

Так, из приведенных эпюр деформаций видно, что наибольшее их отклонение наблюдается после выхода зуба сателлита из зацепления. При этом расчетная эпюра деформаций имеет резкий скачок, связанный с изменением в этом сечении изгибающего момента M_1. Естественно, что в действительности, в связи с перераспределением нагрузки между одновременно работающими зубьями, не может происходить такого изменения деформации тензодатчика, поэтому экспериментальная эпюра имеет более плавный характер.

Тензометрирование эпициклов проводилось при различных сочетаниях шлицевых венцов в соединении, поэтому представилась возможность экспериментально оценить влияние закона распределения реактивной нагрузки по шлицам на напряженное состояние обода. Обработка результатов тензометрирования эпициклов показала, что какой-либо зависимости между способом сочетания шлицевых венцов и относительной деформацией тензодатчиков не существует. Была также сделана попытка сопоставить величины относительных деформаций тензодатчиков с зазорами в тех шлицах, которые находились непосредственно над датчиками. Оказалось, что такие «местные» зазоры в шлицах оказывают некоторое влияние на величину относительной деформации датчика — с увеличением зазоров в шлицах относительная деформация датчика незначительно увеличивалась.

Таким образом, экспериментальная проверка расчетного метода определения напряженного и деформированного состояний обода эпицикла показала его достаточную точность, что подтверждает правильность принятой расчетной схемы. Оказалось, в частности, что, определяя напряжения в ободе эпицикла, можно ограничиться учетом усилий только от зубчатых зацеплений, пренебрегая в то же время реактивными усилиями в шлицах.

Разработанный метод расчетного определения податливости обода эпицикла был экспериментально проверен в процессе виб-

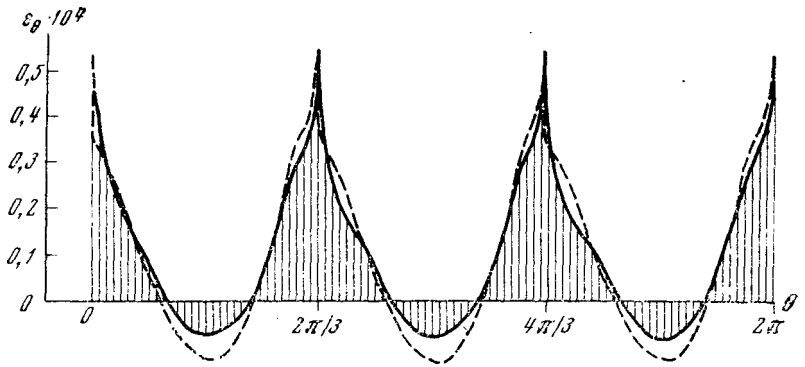


Рис. 28. Эпюры относительных деформаций тангенциального датчика
— эксперимент, ——— расчет

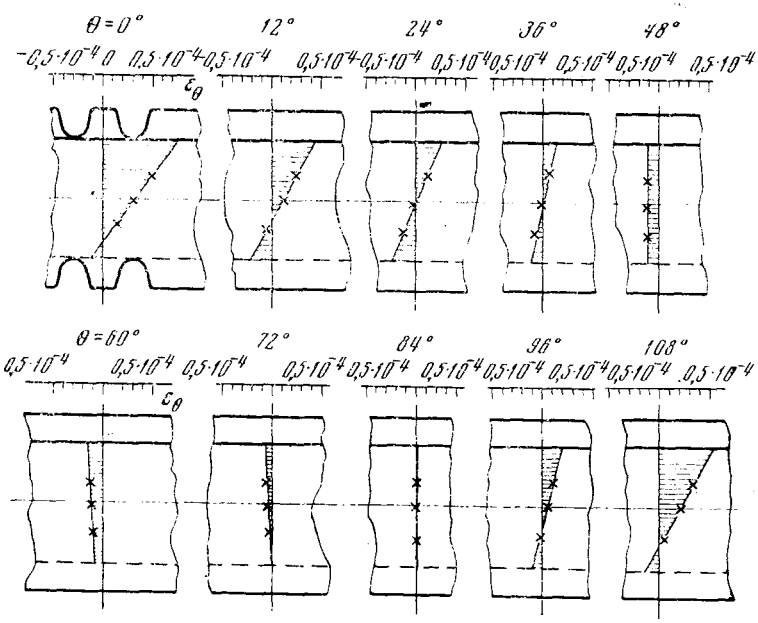


Рис. 29. Распределение относительных деформаций по высоте сечения эпицикла

рационных испытаний планетарного редуктора. Так, испытания показали, что резонансная частота $f = 1050$ *гц* обусловлена жесткостью зубчатого зацепления сателлит — эпицикл. На основании этого величина жесткости обода эпицикла оказалась равной расчетной величине $C_{уд} = 54.000$ *кГ/см*^{2}.

Эти данные были вторично проверены при испытании редуктора резонансным методом. В системе редуктора в неподвижном состоянии с помощью специального вибратора через солнечную шестерню возбуждались крутильные колебания. С помощью пьезоэлектрических датчиков типа ИДК-2, с некоторых деталей редуктора (солнечная шестерня, сателлиты, эпицикл, водило) снимались спектрограммы в диапазоне частот от 200 до 5000 *гц*.

В процессе этих испытаний в спектре частот колебаний эпицикла резко выделялась резонансная частота $f = 1050$ *гц*, что также подтверждает правильность расчетного определения податливости обода эпицикла.

Большое практическое значение для прочностного расчета имеет характер распределения напряжений по высоте сечения. Приведенная выше эпюра относительных деформаций построена для тензодатчика, находящегося на 5 *мм* выше средней линии сечения эпицикла. Сопоставление экспериментальных эпюр относительных деформаций показало, что чем ближе к зубчатому венцу расположен тензодатчик, тем больше разница в экспери-

ментальной и расчетной эпюрах относительной деформации тензодатчиков. На рис. 29 приведены эпюры относительных деформаций ε_0, построенные по показаниям тензодатчиков, расположенных в нескольких сечениях по высоте сечения обода эпицикла.

Характер изменения относительных деформаций по сечению обода эпицикла существенно зависит от расположения сечения от нагруженного зуба. В зоне, прилежащей к нагруженному зубу, обод эпицикла подвержен действию резко выраженных изгибающих напряжений. По мере удаления от нагруженного зуба распределение напряжений быстро изменяется. Так, в сечении $\theta = \pm 24°$ обод испытывает только растягивающие или сжимающие напряжения, а изгиб обода практически отсутствует, и только в зоне, расположенной на равном расстоянии от сателлитов ($\theta = 60°$), на обод эпицикла действуют небольшие сжимающие изгибные напряжения. Такой характер распределения напряжений хорошо соответствует расчетным эпюрам M_1 и N и объясняется особенностями нагружения эпицикла усилиями от зубчатых зацеплений сателлит — эпицикл.

Характерной особенностью приложения усилий к ободу эпицикла от зубчатых зацеплений является наличие в числе составляющих нагрузки сосредоточенного изгибающего момента $Ph_з$, вызванного внецентровым приложением окружного усилия P. Он оказывает существенное влияние на распределение напряжений по высоте сечения обода эпицикла. Внутренние волокна, ближе всего расположенные к нагруженному зубу, находятся в зоне концентрации изгибных напряжений в основании зуба. Поэтому чем ближе к зубчатому венцу находится тензодатчик, тем больше на его показания влияет местная концентрация изгибных напряжений в основании нагруженного зуба.

Тензометрирование обода эпицикла подтверждает это положение. Действительно, как следует из рис. 29, в зоне, прилежащей к нагруженному зубу, все три тензодатчика записывают относительную деформацию одного знака. Особенно четко это проявляется в момент, когда тензодатчики находятся в сечении, где действует сосредоточенный изгибающий момент $Ph_з$. Поскольку тензодатчик 5 ближе всех расположен к нагруженному зубу, то его относительтная деформация максимальна: датчики *2* и *8*, расположенные в более удаленных от зубчатого венца волокнах, в меньшей мере подвержены действию изгибающего момента $Ph_з$. Как показывает рис. 29, действие сосредоточенного изгибающего момента быстро падает по мере удаления сателлита от сечения, где установлен тензодатчик, при этом оно не одинаково при приближении и удалении сателлита от тензодатчика.

Экспериментальное исследование напряженного состояния обода эпицикла указывает на необходимость учитывать все составляющие нагрузки на зубчатом венце: окружную P, радиальную R силы и изгибающий момент $M_{и1} = Ph_з$. По данным работы [49], в зависимости от конфигурации сечения обода эпицикла

напряжения, вызванные местным изгибающим моментом $M_{и1} = P \cdot h_з$, могут составлять до 70% от суммарных напряжений.

Установленный закон распределения напряжений по сечению обода эпицикла позволил уточнить вопрос об определении дополнительных перемещений зуба, обусловленных деформативностью части обода, прилежащей к зубу (§ 1.2). В работе [74] предлагается определять деформацию прилежащей к зубу части обода в предположении, что точка пересечения оси зуба и нейтральной оси обода зубчатого колеса не перемещается в результате местной концентрации изгибных напряжений в основании нагруженного зуба.

Проведенное экспериментальное исследование показало, что даже для такого достаточно жесткого обода эпицикла, который был испытан ($H_0/\rho = 0{,}09$), это предположение неправомерно. Поэтому при расчете деформации прилежащей к зубу части обода (§ 2 гл. первой) было принято, что неподвижные точки находятся на поверхности зубчатого колеса в некотором удалении от нагруженного зуба, а не в глубине его, что более соответствует проведенному эксперименту, поскольку местное возбуждение поля напряжений достаточно быстро затухает с удалением от нагруженного зуба (с ростом угла θ).

§ 3. Дополнительная деформация зубьев, обусловленная податливостью ободьев центральных колес

Деформация ободьев центральных колес приводит к увеличению перемещений контактирующих зубьев, увеличивая тем самым податливость зубчатого зацепления. При расчете жесткости зубчатого зацепления интерес представляют перемещения непосредственно в местах приложения усилий от сателлитов. Поэтому воспользуемся формулами (2.2) для определения дополнительных перемещений зубьев и шлицов, обусловленных податливостью обода центрального колеса.

Перемещение точки приложения тангенциальной (окружной) силы P на зубе, вызванное деформацией обода центрального колеса, измеренное вдоль линии зацепления, являющейся линией пересечения плоскости зацепления торцовой плоскости, может быть определено следующим образом:

$$\Delta_n = w \sin \alpha_s + (v + h_з \gamma) \cos \alpha_s. \tag{3.1}$$

Определим удельную податливость обода центрального колеса как отношение перемещения Δ_n к удельной нормальной нагрузке на профиле зуба $p_n = P_n/B$ (где B — ширина зубчатого венца). Выражая силу p_n через окружное усилие P, действующее в зубчатом зацеплении сателлит—центральное колесо, найдем удельную

податливость обода центрального колеса

$$\delta_{об} = \frac{\Delta_n}{p_n} = \frac{B}{P}\left[w \cdot \sin\alpha_s \cdot \cos\alpha_s + (v + h_з\gamma)\cos^2\alpha_s\right]. \qquad (3.2)$$

Поскольку собственные податливости по радиальному упругому перемещению w равны нулю, то в соответствии с (2.3) формула (3.2) примет вид

$$\delta_{об} = \frac{6}{E\,(H_0/\rho)^3\,k_I}\,(k_w \sin^2\alpha_s + k_v \cos^2\alpha_s), \qquad (3.3)$$

где H_0 — минимальная толщина обода центрального колеса, k_I — коэффициент, учитывающий влияние наличия зубьев на жесткость обода центрального колеса, k_w, k_v — коэффициенты радиальных и тангенциальных упругих перемещений центрального колеса.

При записи формулы (3.3) принято, что обод центрального колеса имеет прямоугольное сечение с шириной B и толщиной H_0. Рекомендации по определению коэффициента жесткости k_I будут приведены в следующем параграфе.

Коэффициенты упругих перемещений k_w и k_v с учетом данных табл. 15 могут быть определены по формуле

$$k_w = k^0_{wR}; \qquad k_v = k^0_{vP} + (k^0_{vM} + k^0_{\gamma P})\,\frac{h_з}{\rho} + k_{\gamma M}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2. \qquad (3.4)$$

Из формулы (3.4) видно, что если коэффициент радиальных перемещений зависит только от числа сателлитов в планетарном редукторе, то коэффициент тангенциальных перемещений k_v зависит также и от положения точки контакта на профиле зуба. Поскольку коэффициенты k^0_{vM} и $k^0_{\gamma P}$ равны между собой (в матрице жесткости C они расположены симметрично относительно главной диагонали), то в зависимости от того, наружные или внутренние зубья на центральном колесе, коэффициент при $h_з/\rho$ в формуле (3.4) обращается в нуль или удваивается.

Таким образом, в общем виде формула для коэффициента тангенциальных перемещений имеет вид

$$k_v = a + b\left(c - \frac{h_з}{\rho}\right)^2. \qquad (3.5)$$

Если изгибающий момент $M_{ш}$ направлен так, что увеличивает угол θ, то значения коэффициентов, входящих в (5), следует определять из табл. 15; если изгибающий момент $M_{и1}$ действует в противоположном направлении, то

$$a = k^0_{vP}, \qquad b = k^0_{\gamma M}, \qquad c = 0. \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.5) следует, что коэффициент тангенциальных перемещений k_v имеет минимум при некотором значении $h_з/\rho$, за-

висящем от числа сателлитов в планетарном редукторе. Это значит, что при однопарном зацеплении зубьев в зацеплении сателлит—центральное колесо может происходить изменение жесткости зубчатого зацепления по фазе зацепления. В зацеплении сателлит-эпицикл это изменение будет незначительным, так как отношение $h_з/\rho$ невелико, в зацеплении сателлит—солнечная шестерня при малых ρ это изменение следует принимать во внимание, поскольку оно может повлиять на виброакустические характеристики редуктора.

Для ободьев центральных колес, выполненных в виде кольца, соединенного с оболочкой, структурная формула для удельной податливости остается прежней (3.3). Значения коэффициентов радиальных k_w и тангенциальных k_v перемещений могут быть определены из табл. 15 в соответствии с формулами (3.4).

Для дополнительных перемещений шлицов, обусловленных податливостью ободьев центральных колес кольцевой формы, по аналогии можно записать зависимости типа (3.1). Применительно к шлицевым соединениям центральных колес представляет интерес знание дополнительных перемещений шлицов не только по нормали к профилю, но и по касательной, поскольку, например, относительное проскальзывание профилей шлицов определяется в том числе и упругим деформированием ободьев центральных колес. Разница по сравнению с (3.1) заключается в том, что если поворот сечения вызывает положительное смещение зубьев, то смещение шлицов будет отрицательным.

Рассмотрим поворотную деформацию ободьев центральных колес, приводящую к нарушению контакта зубьев и концентрации нагрузки по длине зубчатого венца. Если центральные колеса имеют кольцевую форму, то поворотная деформация обода может иметь место только в косозубом зубчатом зацеплении за счет внецентрового приложения осевых нагрузок на зубьях и шлицах. Если же центральные колеса имеют форму кольца, соединенного с оболочкой, то поворотная деформация обода может иметь место не только в косозубом, но и в прямозубом зубчатом зацеплении за счет изгиба оболочки под действием радиальных нагрузок на зубьях колес.

Угол поворота обода центрального колеса в сечении, характеризуемом углом θ, может быть определен из выражения

$$v_к = \frac{Q\rho^2}{EI_2}\left(k_{vQ} + k_{vM_2}\frac{l}{\rho} + k_{vM_к}\frac{h_з}{\rho}\right), \qquad (3.7)$$

где Q — осевая сила в зубчатом зацеплении сателлит—центральное колесо, l — плечо действия силы Q, создающее изгибающий момент $M_{и2}$, $h_з$ — плечо действия силы θ, создающее крутящий момент $M_к$.

Как указано выше, в зубчатом зацеплении отсутствует изгибающий момент $M_{и2}$, поэтому, полагая $l = 0$, получим выраже-

ние для угла поворота сечения

$$v = \frac{Q\rho^2}{EI_2}\left(k_{vQ} + k_{vM_к}\frac{h_з}{\rho}\right). \qquad (3.8)$$

Поворотная деформация кольца, вызванная равномерно распределенным по периметру крутящим моментом, связанным с внецентровым приложением осевых сил в шлицах, может быть найдена по формуле (3.8), если угол π/Z_c будет стремиться к нулю. Тогда формула для равномерной составляющей угла поворота сечений обода центрального колеса примет вид

$$v_ш = \frac{Q_ш \rho^2}{\pi EI_2} \cdot z_ш \frac{h_ш}{\rho}. \qquad (3.9)$$

В сечениях, где действуют усилия от сателлитов, углы поворота $v_з$ и $v_ш$ имеют одинаковый знак, поэтому суммарный угол поворота определится с учетом (3.8) и (3.9) в виде

$$v_\Sigma = v_з + v_ш. \qquad (3.10)$$

Для обода центрального колеса, выполненного в виде кольца с присоединенной оболочкой, угол поворота кольца, вызванный осевыми усилиями, может быть также определен по формуле (8).

Поворотная деформация ободьев центральных колес имеет большое значение для расчета на прочность зубчатых зацеплений в редукторах с податливыми ободьями зубчатых колес. Формулы (3.8)—(3.10) позволяют определить угол упругого перекоса зубьев и найти соответствующий ему коэффициент концентрации нагрузки [28, 54], а в случае необходимости применить корректировку угла наклона зубьев, компенсирующую упругую деформацию зубьев.

§ 4. Влияние зубьев на деформацию ободьев центральных классов

При расчетах на прочность и жесткость ободьев зубчатых колес последние рассматриваются как тонкие упругие кольца, толщина которых равна толщине минимального сечения (между впадинами зубьев и шлицов) [49]. В действительности наличие зубьев и шлицов на ободе центрального колеса повышает его жесткость и прочность, поэтому при уточненных расчетах это необходимо учитывать.

Теоретическое решение задачи о влиянии зубьев и шлицов на жесткость обода зубчатого колеса представляет значительные трудности [2], поэтому на практике нашли распространение экспериментальные методы исследования этой проблемы.

Для учета влияния зубьев на жесткость обода зубчатого колеса обычно вводится коэффициент k_I, равный отношению момен-

тов инерции некоторого эффективного $I_{эф}$ и минимального I_0 моментов инерции сечений обода

$$k_I = I_{эф}/I_0. \tag{4.1}$$

Поэтому при проведении жесткостных расчетов ободьев зубчатых колес необходимо располагать величинами эффективной толщины сечения $H_{эф}$ и радиуса центров тяжести сечения обода $\rho_{эф}$. Назначение этих величин представляет значительные трудности, так как наличие зубьев повышает жесткость обода зубчатого колеса.

Эффективная толщина сечения обода зубчатого колеса $H_{эф}$ может быть выражена через минимальную толщину сечения H_0 в виде

$$H_{эф} = H_0 + km_n, \tag{4.2}$$

где m_n — нормальный модуль зацепления, k — коэффициент, зависящий от геометрических параметров сечения (отношения высоты зуба к толщине обода, угла наклона зубьев, радиуса кривизны обода).

Тогда для обода зубчатого колеса прямоугольного сечения выражение для коэффициента жестности k_I примет вид

$$k_I = \left(1 + k\frac{m_n}{H_0}\right)^3. \tag{4.3}$$

В литературе имеются некоторые рекомендации по выбору величины коэффициента жесткости k_I, полученные экспериментальным или эмпирическим путем.

Как следует из структурной формулы (4.3), величина коэффициента жесткости k_I полностью определяется коэффициентом k, зависящим от геометрических параметров обода зубчатого колеса. Поэтому представляет интерес оценить изменение величины k по данным опубликованных работ. Как видно из табл. 21, величина коэффициента k значительно изменяется, колеблясь в широких пределах от 0,396 до 1,750, при этом бо́льшие значения соответствуют более жестким ободьям зубчатых колес.

Из обзора работ, посвященных исследованию влияния зубьев на жесткость обода зубчатого колеса, видно, что, как правило, эти исследования проводились на моделях реечного типа, поэтому величины коэффициентов жесткости k_I могут быть использованы в расчетной практике с определенными коррективами. Только в работах [49, 2] исследования выполнялись на реальных эпициклах планетарных редукторов, причем в первой из них нагружение эпициклов осуществлялось в модельных условиях, а во второй — эпицикл нагружался в реальных условиях непосредственно в планетарном редукторе.

Другая особенность проведенных экспериментальных исследований по определению k_I заключалась в том, что в них, за

Таблица 21

Источник	Формула для k	Величина k для эксперимента	Величина k_I для эксперимента	$k/k_{эксп}$	$k_I/k_{I\,эксп}$	Примечание
[2]	$0{,}5/\cos\beta_д$	0,696	1,39	0,960	0,986	Эксперимент на редукторе $1/\rho = 0{,}04$ $см^{-1}$
[7]	$1 + c$	1,500	1,96	2,070	1,390	Эмпирический
[86]	0,628	0,628	1,35	0,876	0,957	Эмпирический
[13]	$0{,}15 + 0{,}45\cdot10^{-3}\beta_д^2$	0,396	1,21	0,545	0,858	Эксперимент на рейках
[44]	$0{,}075\,(1 + 0{,}5\,m_n)\,(1 + \sin\beta_д)$	0,828	1,47	1,140	1,042	Эксперимент на рейках
[49]	$a - b/\rho_{см}$ $H_з/H_0$ a b 1,00 0,40 1,50 0,50 0,65 3,00 0,25 0,17 0,50	0,678	1,38	0,935	0,979	Эксперимент с эпициклом $1/\rho = 0{,}15$ $см^{-1}$
[35]	1,75	1,75	2,16	2,410	1,525	Эксперимент с шестерней $1/\rho \geqslant 0{,}20$ $см^{-1}$
Эксперимент		0,726	1,41	1,000	1,000	Эксперимент с эпициклом $1/\rho = 0{,}0153$ $см^{-1}$

исключением работы [2], коэффициент k_I находили только сравнением перемещений образца при наличии или отсутствии зубьев. Однако совершенно не исследовалось распределение напряжений по высоте сечения образца. Но очевидно, что наличие зубьев изменяет положение нейтральной линии исследуемого образца, поэтому анализ распределения напряжений по высоте сечения образца позволит проверить полученные на основании измерения перемещений образца данные.

Определение коэффициента жесткости k_I прямым путем по результатам измерения перемещений обода зубчатого колеса по простой схеме нагружения не всегда представляется возможным. В некоторых случаях желательно определять k_I в реальных условиях работы зубчатого колеса непосредственно в редукторе. В связи с этим был разработан тензометрический метод определения коэффициента жесткости k_I обода зубчатого колеса [7], экспериментальная проверка которого была проведена на эпицикле планетарного редуктора, имеющего следующие геометрические размеры поперечного сечения:

Минимальная толщина сечения $H_0 = 3{,}611$ *см*,
Ширина обода $B = 12{,}50$ *см*,
Момент инерции сечения $I_1 = 489$ *см*^{4},
Радиус нейтральной окружности обода $\rho_0 = 60{,}894$ *см*.

Определение влияния зубьев на жесткость обода зубчатого колеса сводится по существу к нахождению реальной жесткости колеса и сопоставлению ее с расчетной величиной, полученной на основании теоретического рассмотрения задачи о податливости обода зубчатого колеса. В модельных условиях влияние зубьев на жесткость образцов определяется в чистом виде, сопоставлением измеренных перемещений соответствующих точек при наличии зубьев и после их удаления механическим путем. Естественно, что в данном случае применим первый метод исследований, т. е. измерение перемещений точек обода, а в качестве расчетных формул для перемещений и напряжений в ободе зубчатого колеса следует использовать формулы, полученные для кольца под действием выбранной при эксперименте совокупности сил.

Нагружение образцов в подобных экспериментах выбирается таким, чтобы упростить проведение исследования. Например, при испытании плоских образцов наиболее простым будет нагружение их в середине пролета после установки на две опоры. В случае испытания эпициклов наиболее простое нагружение осуществляется двумя противоположно направленными силами. Поскольку основной целью исследования была проверка тензометрического метода определения коэффициента жесткости k_I, то нагружение эпицикла осуществлялось в модельных условиях двумя противоположно направленными радиальными силами.

Наклейка тензодатчиков на ободе эпицикла осуществлялась только в одном радиальном сечении. Испытания были проведены

при двух схемах наклейки тензодатчиков. Во-первых, была применена мостиковая схема, при которой рабочими были тензодатчики, ориентированные в тангенциальном направлении, а компенсационными — ориентированные в радиальном направлении. При этом использовались тензодатчики с базой $l = 5$ *мм* и активным сопротивлением $R = 90$ *ом*. Основной недостаток такой схемы измерения — это ее невысокая надежность, так как компенсационные тензодатчики регистрируют также незначительные радиальные относительные деформации. Поэтому полученный результат будет отличаться от действительных напряжений, причем погрешность измерения напряжений оценить не удается. Во-вторых, были применены одиночные тензодатчики с базой $l = 15$ *мм* и активным сопротивлением $R = 304$ *ом*, которые располагались на эпициклах в тангенциальном направлении.

Радиальные перемещения точек эпицикла измерялись индикатором стрелочного типа с ценой деления 0,02 *мм*. Показания тензодатчиков регистрировались с помощью тензометрического усилителя. Эпицикл нагружался ступенчатой нагрузкой от 0 до 1000 *кГ* через каждые 250 *кГ*. Испытания показали, что измерение напряжений по мостиковой схеме имеет невысокую точность.

Аналитические выражения для радиальных перемещений точек нейтральной оси обода эпицикла под действием двух радиальных сжимающих сил имеют вид

$$w_з = w_0/k_I,$$

где

$$w_0 = \frac{P\rho^3}{EI_0}\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\left(\sin\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\theta\right]\right.$$

Подставляя значения величин, входящих в эту формулу для испытанных эпициклов, получим

$$w_з = 2{,}13P\frac{k_w}{k_I}\cdot 10^{-2}\ мм,$$

что для нагрузки $P = 1000$ *кГ* даст

$$w_з(1000) = 2{,}13\frac{k_w}{k_I}\ мм$$

и

$$w_0(1000) = 2{,}13\,k_w\ мм.$$

В табл. 22 приведены результаты определения коэффициента жесткости k_I по измеренным радиальным перемещениям обода эпицикла. Данные здесь отношения текущих значений $w_{(\theta)}/w_{(0)}$ показывают, что эпюры расчетных и экспериментальных величин перемещений подобны между собой.

Исключение составляют эти отношения при угле $\theta = 45°$, что связано с малыми величинами измеряемых перемещений и

Таблица 22. **Определение коэффициента жесткости k_I по результатам измерения радиальных перемещений обода эпицикла**

$\theta°$	w_0, *мм*	$\frac{w_0(\theta)}{w_0(0)}$	w_1, *мм*	w_2, *мм*	$\frac{w_1(\theta)}{w_1(0)}$	$\frac{w_2(\theta)}{w_2(0)}$	k_{I_1}	k_{I_2}	k_I
0	—1,58	1,000	—1,17	—1,13	1,000	1,000	1,350	1,400	1,375
15	—1,33	0,842	—0,98	—0,94	0,838	0,831	1,358	1,415	1,387
30	—0,71	0,449	—0,47	—0,51	0,401	0,451	1,511	1,391	1,451
45	0,06	—0,039	0,11	0,11	—0,094	—0,097	—	—	—
60	0,77	—0,487	0,53	0,55	—0,453	—1,486	1,453	1,400	1,426
75	1,28	—0,810	0,90	0,90	—0,770	—0,796	1,423	1,423	1,423
90	1,45	—0,918	1,04	1,02	—0,890	—0,903	1,394	1,421	1,407

увеличением в связи с этим погрешности измерения, Поэтому при $\theta = 45°$ значения коэффициента жесткости k_I не определялись. Как следует из приведенных в таблице данных, средняя величина коэффициента жесткости k_I по результатам измерения радиальных перемещений эпицикла оказалась равной 1,411.

Используя найденную величину, можно определить значения k_I,коэффициента k и эффективной толщины обода эпицикла

$$k = \frac{H_0}{m_n}\left(\sqrt[3]{k_I} - 1\right) = 0{,}726,$$

$$H_{эф} = H_0 + km_n = 40{,}473 \text{ мм}.$$

В табл. 22 приведены значения коэффициента k, определенные для испытанного эпицикла по различным рекомендациям. Сопоставление расчетных и экспериментальных величин коэффициента k показывает, что для данных геометрических размеров обода эпицикла наилучший результат дают рекомендации, полученные в работе [2]. Проведенное исследование позволяет более обоснованно назначать величину коэффициента жесткости k_I в расчетной практике.

Переходим к определению коэффициента жесткости k_I по результатам тензометрирования обода эпицикла. Идея этого метода заключается в следующем. Увеличение эффективной толщины обода эпицикла в связи с ожествляющим влиянием зубьев должно привести к смещению нейтральной линии обода эпицикла в сторону зубчатого венца и к изменению угла наклона эпюры напряжений по высоте сечения обода эпицикла.

Теоретическое положение нейтральной линии обода эпицикла найдется из условия равенства нулю в этой точке сечения тангенциальных напряжений

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2F}\left[\cos\theta - \frac{12\rho}{H_0^2}\cdot y\left(\frac{2}{\pi} - \sin\theta\right)\right] = 0,$$

что даст

$$y_0 = \frac{H_0^2}{12\rho} k_\theta,$$

где

$$k_\theta = \cos\theta \Big/ \left(\frac{2}{\pi} - \sin\theta\right).$$

С учетом влияния зубьев положение нейтральной линии обода эпицикла определится по формуле

$$y_{эф} = \frac{H_{эф}^2}{12\rho_{эф}} k_\theta.$$

Для прямоугольного сечения

$$k_I = (H_{эф}/H_0)^3$$

и

$$H_{эф} = H_0 \sqrt[3]{K_I},$$

откуда

$$K_I = (y_{эф}/y_0)^{3/2}. \qquad (4.4)$$

Таким образом, по формуле (4.4) может быть определена величина коэффициента жесткости из условия, что нейтральная линия обода эпицикла в связи с влиянием зубьев на его жесткость изменяет свое положение.

Следует иметь в виду, что координаты $y(y_{эф})$ в (4.4) определяются относительно средней линии минимального (эффективного) сечения обода эпицикла. Поскольку при обработке экспериментальных эпюр распределения напряжений по высоте сечения обода эпицикла отсчет удобнее вести относительно средней линии минимального сечения, то необходимо выполнить приведение по формуле

$$y_{эф} = y'_{эф} - \frac{H_{эф} - H_0}{2}, \qquad (4.5)$$

где $y'_{эф}$ — координата нейтральной линии эффективного сечения обода эпицикла относительно средней линии его минимального сечения.

Как видно из формулы (4.5), координата $I_{эф}$ в свою очередь зависит от коэффициента жесткости $k_I = f(H_{эф})$, поэтому для определения коэффициента k_I формула (4.4) непригодна. Возьмем поэтому отношение координат $y_{эф}$ и y_0 и примем $\rho_{эф}/\rho \approx 1$. Тогда получим

$$\frac{y_{эф}}{y_0} = \left(\frac{H_{эф}}{H_0}\right)^2. \qquad (4.6)$$

После подстановки в (4.6) значения $I_{эф}$ из (4.5) получим следующее квадратное уравнение относительно отношения $H_{эф}/H_0$:

$$\left(\frac{H_{эф}}{H_0}\right)^2 + \frac{H_{эф}}{H_0} \cdot \frac{H_0}{2y_0} - \left(\frac{H_0}{2y_0} + \frac{y'_{эф}}{y_0}\right) = 0. \qquad (4.7)$$

Сохраняя два члена в разложении квадратного корня, входящего в решение уравнения (4.7), получим следующий результат:

$$\frac{H_{эф}}{H_0} \approx 1 + \frac{2y'_{эф}}{y_0},$$

отсюда

$$k_I = \left(1 + \frac{2y'_{эф}}{y_0}\right)^3. \qquad (4.8)$$

Формула (4.8) может быть использована для нахождения коэффициента k_I по экспериментальным значениям положения нейтральной линии обода эпицикла $y'_{эф}$.

Из формулы (4.8) следует, что коэффициент жесткости k_I, определенный по экспериментальным значениям $y'_{эф}$, будет различным для различных углов θ. Причина этого заключается в том, что при разложении квадратного корня в решении уравнения (4.7) было сохранено только два члена. Расчеты показали, что для конструктивных размеров испытанного эпицикла и выбранной схемы нагружения максимальная погрешность от принятого допущения не превосходит 2%. Поскольку изгибные напряжения значительно превосходят напряжения растяжения, то величина смещения нейтральной линии $y'_{эф}$ всегда будет меньше высоты сечения обода эпицикла H_0 и изменение коэффициента жесткости K_I (4.8) по углу θ будет незначительным. В связи с этим при расчетах коэффициента жесткости K_I по результатам тензометрирования обода эпицикла допустимо пользоваться приближенной зависимостью (4.8).

Найдем теперь коэффициент жесткости K_I из условия, что эпюра напряжений по высоте сечения обода эпицикла меняет свой наклон с связи с ожествляющим влиянием зубьев. Угол наклона эпюры напряжений φ с радиальной осью может быть определен из условия

$$\operatorname{tg} \varphi_{эф} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_P}{y} = \frac{P\rho}{2y_{эф}}\left(\frac{2}{\pi} - \sin\theta\right),$$

отсюда

$$K_I = \operatorname{tg} \varphi_0 / \operatorname{tg} \varphi_{эф}, \qquad (4.9)$$

где φ_0 — теоретическое значение угла наклона эпюры напряжений с радиальной осью

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{P\rho}{2y_0}\left(\frac{2}{\pi} - \sin\theta\right).$$

Формула (4.9) может быть использована для нахождения коэффициента жесткости K_I по экспериментальным значениям угла наклона эпюры напряжений $I_{эф}$ с радиальной осью эпицикла.

Для сопоставления различных методов определения коэффициента жесткости K_I по методу наименьших квадратов были получены эпюры напряжений по высоте сечения обода эпицикла, по которым были определены величины $y_{эф}$ и $I_{эф}$. Результаты определения коэффциента жесткости K_I по формулам (4.8) и (4.9)

Таблица 23. **Определение коэффициента жесткости K_I по результатам тензометрирования обода эпицикла**

$\theta°$	y_0, *мм*	σ_p, *кГ/см²*	$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{\sigma_p}{y_0}$	$y'_{эф.}$, *мм*	$\sigma_{экс}$ *кГ/см²*	$\operatorname{tg}\varphi_{эф}=\frac{\sigma_{кс}}{y'_{эф}}$
0	0,28	—700	—39,5	—	—	—
15	0,45	—411	—23,5	—2,00	—335	—16,9
30	0,13	—143	—8,5	—2,50	—120	—5,85
45	—1,79	86,6	4,38	—3,00	45	—2,14
60	—0,39	262	14,25	—2,20	205	10,15
75	—0,12	371	20,50	—2,20	300	14,8
90	0	406	22,60	—2,00	340	17,0

k_{Iw}	k_{Iy}	$k_{I\varphi}$	k_σ	k'_σ	k_T
1,375	—	—	—	—	—
1,387	1,390	1,390	1,23	1,22	1,008
1,451	1,490	1,453	1,19	1,21	0,984
—	—	—	—	—	—
1,426	1,420	1,405	1,28	1,29	0,993
1,423	1,380	1,425	1,24	1,25	9,993
1,407	1,390	1,330	1,20	1,24	0,968

сведены в табл. 23. Для сравнения в табл. 23 приведены значения коэффициента жесткости K_I, определенные тремя различными способами: по замеренным радиальным перемещениям $w(K_{Iw})$; по смещению нейтральной линии обода эпицикла $y(K_{Iy})$; по наклону эпюры напряжений $(K_{I\varphi})$.

Как следует из табл. 23, все три метода дают удовлетворительное совпадение величин K_I. Максимальная разница между величинами коэффициента жесткости K_I не превосходит 6%. Средние величины коэффициента K_I, определенные указанными методами, практически совпадают: $K_{Iw} = 1{,}41$; $K_{Iy} = 1{,}42$; и $K_{I\varphi} = 1{,}40$. Таким образом, на основании проведенного исследования в тех случаях, когда испытания в модельных условиях осуществить не удается, можно рекомендовать тензометрический метод определения коэффициента жесткости K_I.

При экспериментальных исследованиях напряженного состояния ободьев центральных колес планетарных механизмов с помощью тензодатчиков необходимо проводить тарировку тензодатчиков, при этом следует считаться с тем, что ожествляющее действие зубьев оказывает влияние нагрузки на регистрируемые тензодатчиками сигналы. Отклонение экспериментальной величины относительной деформации, измеренной тензодатчиком, от расчетной величины определяется тремя основными причинами: отклонением действительной величины нагрузки; влиянием зубьев на жесткость обода эпицикла; качеством наклейки тензодатчиков.

При эксперименте всегда удается обеспечить нагружение эпицикла необходимой силой, поэтому первую причину расхождения расчетных и экспериментальных относительных деформаций можно исключить из рассмотрения. Влияние зубьев на жесткость обода эпицикла может быть определено одним из указанных методов (табл. 23). Для оценки качества наклейки тензодатчиков следует исключить влияние зубьев на жесткость обода эпицикла следующим образом. В табл. 23 в качестве примера приведены отношения расчетных и измеренных напряжений на наружной цилиндрической поверхности эпицикла $K_\sigma(y = \frac{H_0}{2} = 18$ *мм*). Влияние зубьев на напряжения в ободе эпицикла может быть приближенно оценено отношением

$$K'_\sigma = k_I \frac{I_{\text{расч}}}{I_{\text{эксп}}} = k_I \frac{\frac{H_0}{2} + y_0}{\frac{H_0}{2} + y'_{\text{эф}}}. \qquad (4.10)$$

В табл. 23 приведены значения коэффициента K'_σ, определенные для средних величин коэффициента жесткости K_I (для каждого значения θ). Отношение K'_σ / K_σ характеризует качество наклейки тензодатчиков на ободе эпицикла. Как видно из приведенных данных, погрешность напряжений, обусловленная качеством наклейки тензодатчиков, не превосходит 4%.

Предложенный метод определения влияния зубьев на жесткость обода эпицикла позволяет правильно подойти к тарировке тензодатчиков, установленных на эпицикле, т. е. к определению численного соотношения между отсчетом по шкале прибора и относительной деформацией в исследуемой точке эпицикла. С этой целью следует пользоваться изложенной методикой:

а) на основании тензометрирования обода эпицикла определить положение нейтральной линии $y'_{\text{эф}}$ и угол наклона эпюры напряжений по высоте сечения обода эпицикла $\varphi_{\text{эф}}$;

б) по формулам (4.8) и (4.9) определить величину коэффициента жесткости K_I;

в) определить отношение расчетной и экспериментальной величин напряжений в некоторой точке обода эпицикла по формуле

$$k_\sigma = \sigma_{\text{расч}} / \sigma_{\text{эксп}};$$

г) по формуле (4.10) определить влияние зубьев на напряжения в ободе эпицикла;

д) найти тарировочный коэффициент, характеризующий влияние качества наклейки тензодатчиков на измерения напряжений по формуле

$$k_T = k_\sigma / k'_\sigma;$$

е) определить действительные напряжения, возникающие в ободе эпицикла по формуле

$$\sigma_{\text{действ}} = k_T \sigma_{\text{эксп}}.$$

Глава 5. ДЕФОРМАЦИЯ ОБОДА САТЕЛЛИТА

В планетарных механизмах с большим числом сателлитов обод сателлита выполняется достаточно податливым, в связи с чем возникает необходимость учитывать его деформацию при различных исследованиях и расчетах планетарных механизмов. Повышение податливости ободьев сателлитов увеличивает деформацию ветвей, по которым распределяется передаваемая мощность, что благоприятно сказывается на выравнивании нагрузки по параллельным потокам мощности.

В авиационных планетарных механизмах с большим числом сателлитов обод сателлита обычно служит наружной обоймой для подшипника. От его податливости в значительной степени зависит нагрузочная способность подшипникового узла. По-видимому, этим объясняется то, что первыми появились работы по исследованию напряженного и деформированного состояний данного типа ободьев сателлитов [13, 25, 30].

В работе [13] выполнен расчет внутренних силовых факторов в ободе сателлита в предположении, что угол охвата, характеризующий зону контакта обода и оси сателлита $2\varphi_0 = \pi$. При этих же предположениях в работе [27] определена податливость обода сателлита и обусловленное ею дополнительное упругое перемещение точки приложения нагрузки на зубе.

Схема нагружения обода сателлита в общем случае в значительной мере зависит от его податливости и от контактной деформации на участке сопряжения обода с осью сателлита.

На обод сателлита действуют усилия от зубчатых зацеплений сателлита с центральными колесами и распределенная на участке $2\varphi_0$ нагрузка на участке сопряжения обода и оси сателлита.

Величина угла охвата $2\varphi_0$ является функцией податливости обода сателлита, контактной податливости на участке сопряжения обода с осью сателлита и поэтому зависит от нагрузки, действующей в зубчатых зацеплениях сателлита с центральными колесами. В связи с этим податливость обода сателлита и напряженное состояние, в нем возникающее, в общем случае нелинейно зависят от нагрузки, передаваемой планетарным механизмом.

Строгое решение задачи о напряженном и деформированном состоянии обода сателлита с учетом совместного контактного и изгибного деформирования представляет значительные математические трудности [19]. В связи с этим ниже дается приближенный метод расчета податливости обода сателлита, в котором раздельно определяются деформация обода под действием усилий от зубчатых зацеплений и от реактивной нагрузки в зоне кон-

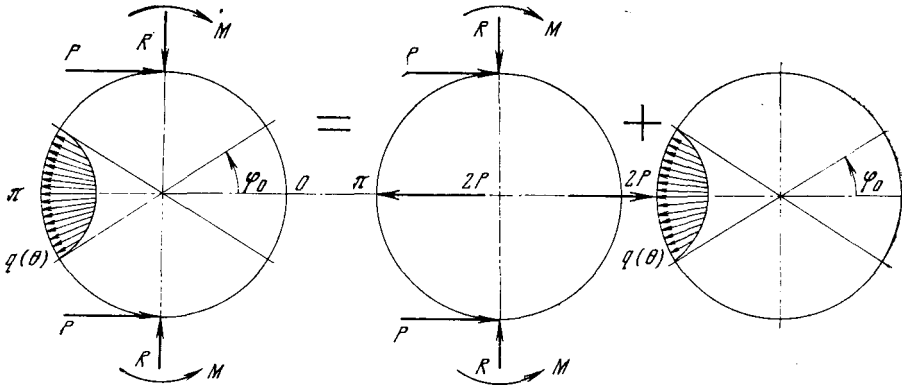


Рис. 30. Эквивалентные схемы нагружения обода сателлита

такта обода и оси сателлита, причем зона контакта $2\varphi_0$ задается произвольной, что позволяет учитывать при расчете ее изменение с изменением нагрузки в зубчатых зацеплениях.

Полная картина деформирования обода сателлита определяется суммированием влияний, оказываемых нагрузками в зубчатых зацеплениях и реактивной нагрузкой в зоне контакта на податливость обода сателлита.

§ 1. Метод элементарной нагрузки

Схема нагружения обода сателлита может быть представлена как сумма двух схем нагружения (рис. 30), первая из которых учитывает нагрузки, действующие в зубчатых зацеплениях сателлита с центральными колесами, и равнодействующую усилий в зоне контакта обода и оси сателлита, а вторая — учитывает характер распределения контактной нагрузки по участку сопряжения обода и оси сателлита.

Такое разбиение общей схемы нагружения обода сателлита на две составляющие представляется целесообразным по следующим соображениям.

Во-первых, в некоторых случаях при высоких жесткостях обода сателлита и контактной жесткости сопряжения обод — ось сателлита угол охвата $2\varphi_0$ настолько мал, что реактивную нагрузку оказывается возможным представить в виде сосредоточенной силы. Для таких конструктивных параметров обода сателлита можно пользоваться первой схемой нагружения (*а*) при расчете напряженного и деформированного состояний обода сателлита.

Во-вторых, в тех случаях, когда жесткость обода сателлита незначительна и ею определяется величина угла охвата $2\varphi_0$ на участке сопряжения обода и оси сателлита, представляется целе-

сообразным с целью выбора рациональных конструктивных параметров обода сателлита оценивать влияние их на податливость и напряженное состояние обода сателлита в связи с изменением угла охвата $2\varphi_0$. Для оценки влияния, оказываемого изменением угла охвата $2\varphi_0$ на напряженное и деформированное состояние обода сателлита, можно пользоваться второй схемой нагружения (*б*).

При исследовании напряженного и деформированного состояния обода сателлита под действием усилий от зубчатых зацеплений сателлита с центральными колесами, обод сателлита рассматривается как тонкое упругое кольцо, нагруженное системой сосредоточенных сил (схема *а*). В этом случае оказывается возможным воспользоваться методом элементарной нагрузки (§ 1, гл. 4).

Поскольку окружные усилия в зубчатых зацеплениях сателлита с солнечной шестерней ($\theta = -\pi/2$) и эпициклом ($\theta = \pi/2$) направлены в одну сторону, то в формулах для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии кольца (4.1.9)

$$Q_\Sigma = \frac{1}{2}\sum_i \left[R_i m_{QR}(\theta - \varphi_i) + P_i m_{QP}(\theta - \varphi_i) + \frac{M_{ui}}{\rho} m_{Qn}(\theta - \varphi_i)\right],$$

$$u_\Sigma = \frac{\rho^3}{2EI}\sum \left[R_i m_{uR}(\theta - \varphi_i) + P_i m_{uP}(\theta - \varphi_i) + \frac{M_{ui}}{\rho} m_{un}(\theta - \varphi_i)\right] \tag{1.1}$$

эти усилия будут входить с противоположными знаками — в сечении $\theta = \pi/2$ — со знаком (—), в сечении $\theta = -\pi/2$ — со знаком (+). Радиальная сила в зубчатых зацеплениях, сжимая обод сателлита, и равнодействующая реактивных сил в сечении $\theta = \pi$ входят в выражения (1.1) со знаком (+). Местный изгибающий момент в зубчатых зацеплениях, обусловленный внецентровым приложением усилий на зубьях, входит со знаком (—) в сечении $\theta = \pi/2$ (зацепление с эпициклом) и со знаком (+) в сечении $\theta = -\pi/2$ (зацепление с солнечной шестерней).

Таким образом, по формулам (1.1) с учетом данных табл. 5 и табл. 7 решается задача об определении внутренних силовых факторов и элементов упругой линии обода сателлита под действием усилий в зубчатых зацеплениях сателлита с центральными колесами.

При исследовании напряженного и деформированного состояния обода сателлита можно воспользоваться решением, полученным в работе [53] о деформации кольца жестких барабанов башенных артиллерийских установок. Схема нагружения кольца совпадает со схемой нагружения обода сателлита, поэтому, воспользовавшись формулами работы [53], получим

$$M = \frac{EI\Delta}{\rho^2} + \frac{R\rho}{2\pi}\{\alpha\sin\alpha - \theta\sin\theta + (B+1)(\cos\alpha - \cos\theta) - \\ - \|\alpha[\alpha\sin\alpha - \theta\sin\theta + (B+1)(\cos\alpha - \cos\theta)]\}, \tag{1.2}$$

$$N = \frac{R}{2\pi}\{\theta\sin\theta + (B-1)\cos\theta + {}_{\alpha}\|[\alpha\sin\alpha - \theta\sin\theta + (B-1)(\cos\alpha - \cos\theta) + 2(\cos\alpha - \cos\theta)]\} \quad (1.3)$$

$$Q = \frac{R}{2\pi}[-\theta\cos\theta + B\sin\theta + {}_{\alpha}\|(\theta\cos\theta - B\sin\theta)], \quad (1.4)$$

где M, N, Q — изгибающий момент, нормальная и перерезывающая силы в сечении с координатой θ; R — равнодействующая реактивных сил $R = 2P$; Δ — разность радиуса отверстия сателлита и наружного радиуса оси сателлита

$$\Delta = R_{1c} - R_{20c};$$

ρ — радиус нейтральной окружности обода сателлита

$$\rho = \frac{1}{2}(R_{1c} + H_{эф});$$

$H_{эф}$ — эффективная толщина сечения обода сателлита,

$$H_{эф} = H_0\left(1 + 0{,}5\frac{m_S}{H_0}\right);$$

H_0 — минимальная толщина сечения обода сателлита; $\alpha = \pi - \varphi_0$ — свободная от совпряжения с осью сателлита внутренняя поверхность обода сателлита; B — постоянная, зависящая от величины угла охвата

$$B = -\frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{2\alpha}}. \quad (1.5)$$

В формулах (1.2) — (1.4) члены за двойной скобкой учитываются при $\theta \geqslant \alpha$.

Выражения для элементов упругой линии обода сателлита имеют следующий вид [53]

$$w = \frac{R\cdot\rho^3}{2\pi EI}\left[\frac{1}{4}(\theta^2 - \alpha^2)\cos\theta + (B+1)(\cos\alpha - \cos\theta) + \left(\alpha\sin\alpha - \theta\sin\theta) + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \times (\alpha\sin\alpha\cos\theta - \theta\sin\theta\cos\alpha)\right]$$

$$\text{при } \theta \leqslant \alpha \quad (1.6)$$

$$v = \frac{R\rho^3}{2\pi EI}\left[\frac{1}{4}(\theta^2 - \alpha^2)\sin\theta + \frac{1}{2}\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta + (B+1)(\theta\cos\alpha - \sin\theta) + (\alpha\theta\sin\alpha + \theta\cos\theta - \sin\theta)\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}(\alpha\sin\alpha\sin\theta + \theta\cos\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)\right] \quad (1.7)$$

$$\text{при } \theta \leqslant \alpha,$$

$$\gamma = \frac{R\rho^3}{2\pi EI}\left[\theta\cos\theta - \frac{5}{2}\sin\theta + (B+1)\theta\cos\alpha - \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)\cos\alpha\sin\theta\right]. \quad (1.8)$$

В работе [53] рассмотрено две стадии деформации кольца. Первая стадия соответствует нагружению кольца незначительной нагрузкой, при которой можно не учитывать ее распределенность на участке $2\varphi_0$ и полагать ее сосредоточенной в сечении $\theta = \pi$. Очевидно, первая стадия соответствует схеме *а* нагружения обода сателлита. Вторая стадия — нагружению кольца такой нагрузкой, при которой уже нельзя пренебрегать распределенностью ее на участке $2\varphi_0$. Предельная нагрузка на границе двух стадий зависит от зазора между охватывающей и охватываемой деталями и, как показано в работе [53], может быть определена по формуле

$$R_{\text{пред}} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{EI}{\rho^3} \Delta. \quad (1.9)$$

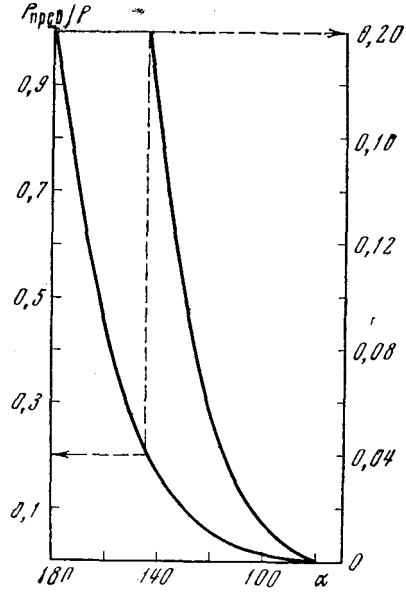


Рис. 31. Зависимость $F(\alpha)$ от α

В этой формуле величина Δ зависит только от разности радиусов охватывающей и охватываемой деталей. В случае же рассматриваемой задачи о деформации обода сателлита величина Δ должна также включать контактную деформацию в зоне сопряжения обода и оси сателлита и деформацию овализации оси сателлита (гл. 7).

Угол охвата сопряженных деталей, очевидно, зависит от нагрузки и, как показано в [53], может быть определен из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{R_{\text{пред}}}{R} = F(\alpha), \quad (1.10)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{(B+2)(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - \alpha^2 \sin\alpha}{1{,}5\pi}. \quad (1.11)$$

На рис. 31 приведена зависимость $F(\alpha)$ от α, построенная по формуле (11), из которой видно, что при $\alpha = \pi$ величина $F(\alpha) = 1$ (соответствует сосредоточенной силе), а при $\alpha = \pi/2$ величина $F(\alpha) = (10 - \pi^2)/6\pi$ (соответствует распределению реактивной нагрузки по полуокружности).

Из формулы (1.9) видно, что величина предельной нагрузки, отнесенной к ширине сателлита, при которой реактивную нагруз-

ку можно считать сосредоточенной в одной точке $\theta = \pi$, равна

$$r_{\text{пред}} = \frac{R_{\text{пред}}}{B_{\text{сат}}} = \frac{\pi E}{9}\left(\frac{H}{\rho}\right)^3 \Delta. \qquad (1.12)$$

Приняв в (12) $H/\rho \approx 0{,}2$; $\Delta \approx 0{,}03$ *см*; $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}, получим

$$r_{\text{пред}} = 180 \text{ кГ/см}.$$

Из формулы (1.11) для принятых значений параметров найдем силу r, при которой реактивная нагрузка распределится по полуокружности

$$r = r_{\text{пред}} \frac{6\pi}{10 - \pi^2} = 26\,100 \text{ кГ/см}.$$

Приведенный расчет показывает, что при средних нагрузках, действующих на обод сателлита, можно считать реактивную нагрузку в зоне контакта обода и оси сателлита сосредоточенной в одной точке $\theta = \pi$ и пользоваться расчетными формулами (1.1). Распределение реактивной нагрузки следует учитывать только при значительных нагрузках. При этом следует иметь в виду, что зона контакта обода и оси сателлита достигает полуокружности только при значительной податливости обода сателлита (что, например, возможно в волновых передачах).

Расчет обода сателлита на прочность и жесткость должен выполняться в следующей последовательности. Для заданных (H/ρ) и Δ по формуле (12) определяется величина равнодействующей реактивной нагрузки $r_{\text{пред}}$, которая затем сравнивается с заданной нагрузкой r. Если окажется, что $r_{\text{пред}} \leqslant r \leqslant 1{,}3\, r_{\text{пред}}$, то можно пренебречь распределенностью реактивной нагрузки и пользоваться формулами (1.1) для определения внутренних силовых факторов и элементов упругой линии обода сателлита.

Если $r > 1{,}3\, r_{\text{пред}}$, то по формуле (1.11) определяется угол (α), который затем подставляется в формулы (1.2)—(1.8). Найденные по формулам (1.2 —(1.8) внутренние силовые факторы и элементы упругой линии обода сателлита складываются с соответствующими величинами, определенными по формулам (1.1), и таким образом находятся уточненные напряженное и деформированное состояния обода сателлита.

§ 2. Симметричная деформация обода сателлита

Приведенные выше структурные формулы (1.1) позволяют определять внутренние силовые факторы и элементы упругой линии обода сателлита при произвольном распределении усилий между зубчатыми зацеплениями сателлит — солнечная шестерня и сателлит — эпицикл. Однако при статическом нагружении планетарного механизма сателлит должен находиться в равновесии

под действием усилий от зубчатых зацеплений и реактивной нагрузки в зоне контакта обода с осью сателлита.

Если предположить, что в зоне контакта обода и оси сателлита отсутствуют тангенциальные реактивные нагрузки, то равновесие сателлита возможно только при равенстве усилий в зубчатых зацеплениях сателлита с центральными колесами. В связи с этим имеет практический интерес решение задачи о податливости обода сателлита при симметричном его нагружении усилиями от зубчатых зацеплений.

Совместное действие сил от зубчатых зацеплений и реакции в зоне контакта обода с осью сателлита следует учитывать суммированием влияний, оказываемых на деформацию обода сателлита обеими группами нагрузок

$$Q_\Sigma = Q_з + Q_P, \qquad u_\Sigma = u_з + u_P. \tag{2.1}$$

Слагаемые формул (1.1), соответствующие схеме нагружения обода сателлита *а* (см. рис. 30), могут быть определены на основе метода элементарной нагрузки суммированием влияний составляющих усилий, действующих в зубчатом зацеплении и равнодействующей реактивной нагрузки в зоне контакта обода и оси сателлита. Структурная формула для первых слагаемых формулы (2.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_з &= \frac{P}{2}\left(K_{QR}\cdot \operatorname{tg}\alpha_S + K_{QP} + K_{QM}\cdot\frac{h}{\rho}\right), \\ u_з &= \frac{P\rho^3}{2EI}\left(K_{uR}\cdot \operatorname{tg}\alpha_S + K_{uP} + K_{uM}\cdot\frac{h}{\rho}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Значения коэффициентов, входящих в формулы (2.2), полученные после суммирования (1.9) с учетом диаметрального расположения зубчатых зацеплений, приведены в табл. 24 и 25.

Формулы для внутренних силовых факторов и элементов упругой линии обода сателлита находятся непосредственно из формул (1.9) в виде

$$M = K_M\cdot\frac{2P\rho}{2},$$

где

$$K_M = -\left(\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - 1\right)\cdot\frac{1}{\pi}, \qquad N = K_N\cdot\frac{2P}{2}, \tag{2.3}$$

где

$$K_N = -\left(\theta\sin\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{\pi}, \qquad Q = K_Q\cdot\frac{2P}{2}, \tag{2.4}$$

где

$$K_Q = \left(\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{1}{\pi}; \; w = K_w\cdot\frac{2P\rho^3}{2EI}, \tag{2.5}$$

где

$$K_W = \left[-1 + \frac{1}{2}\theta\sin\theta - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4} + \frac{\theta^2}{2}\right)^3\cos\theta\right]\cdot\frac{1}{\pi}, \tag{2.6}$$

$$v = K_v\cdot\frac{2P\rho^3}{2EI},$$

Таблица 24

Силовой фактор	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_и = Ph_з$
Перерезывающая сила, Q	$\sin\theta$	$(2(\pi-\theta)\cos\theta+\sin\theta)\cdot\frac{1}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi}\sin\theta$
Нормальная сила, N	$\cos\theta$	$-(\cos\theta+2(\pi-\theta)\sin\theta)\cdot\frac{1}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi}\cos\theta$
Изгибающий момент, M/ρ	$\frac{2}{\pi}+\cos\theta$	$(\pi+3\cos\theta-2(\pi-\theta)\sin\theta)\cdot\frac{1}{\pi}$	$-\left(2+\frac{4}{\pi}\cos\theta\right)$

Таблица 25

Упругое перемещение	Радиальная сила, R	Тангенциальная сила, P	Изгибающий момент, $M_и = Ph_з$
Радиальное перемещение, w	$\frac{\pi}{2}(\pi-\theta)\sin\theta-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\cos\theta$	$\frac{2}{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta-1+\left(\frac{11}{24}\pi^2-\frac{11}{4}+\pi\theta+\frac{\theta^2}{2}\right)\cdot\frac{\cos\theta}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}[(\pi+3\cos\theta)-2(\pi-\theta)\sin\theta]$
Тангенциальное перемещение, v	$\frac{1}{\pi}(\pi-\theta)\left(2-\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)-\sin\theta$	$\left[(\pi-\theta)(\pi-3\cos\theta)+\left(\frac{11}{24}\pi^2-\frac{23}{4}-\pi\theta+\frac{\theta^2}{2}\right)\sin\theta\right]\cdot\frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{\pi}(\pi-\theta)(\pi-2\cos\theta)+\frac{5}{\pi}\sin\theta$
Угол поворота сечения, γ_ρ	$\frac{2}{\pi}(\pi-\theta)-\sin\theta$	$[(\pi-\theta)(\pi-2\cos\theta)-5\sin\theta]\cdot\frac{1}{\pi}$	$-(\pi-\theta)+\frac{4}{\pi}\sin\theta$

где

$$K_v = -\left[\theta(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{6} - \frac{11}{4} + \frac{\theta^2}{2}\right)\sin\theta\right]\cdot\frac{1}{\pi}, \quad (2.7)$$

где $\gamma = K_\gamma \cdot \frac{2P\rho^3}{2EI}$,

$$K_\gamma = \left[-\theta(1+\cos\theta) + \frac{3}{2}\sin\theta\right]\cdot\frac{1}{\pi}. \quad (2.8)$$

Сравнивая формулы (1.2) — (1.8) и (2.3) — (2.8), можно найти влияние равнодействующей реактивных сил на участке контакта обода и оси сателлита. Суммируя результаты, полученные по формулам (1.2) — (1.8), (2.3) — (2.8) и (2.2), можно найти внутренние силовые факторы и элементы упругой линии обода сателлита, соответствующие реальной схеме нагружения (см. рис. 30).

Как показано выше, угол охвата $2\varphi_0$ не достигает π для сателлитов планетарных механизмов, поэтому для участков, где действуют усилия от зубьев центральных колес $\theta = \pm\pi/2$ (наиболее интересных с точки зрения прочности и жесткости обода сателлита), формулы (1.2) — (1.8) упрощаются, поскольку $\pi/2 < \alpha$, и слагаемые, стоящие за двойными скобками в этих формулах, не должны учитываться.

§ 3. Дополнительная деформация зубьев, обусловленная податливостью обода сателлита

При расчете обода сателлита на прочность и жесткость представляет интерес знание величин внутренних силовых факторов и элементов упругой линии обода сателлита в сечениях, где действуют усилия от зубчатых зацеплений.

При $\theta = \pi/2$ формулы (1.2) — (1.8) и (2.3) — (2.8) принимают следующий вид:

$$M = \frac{EI\Delta}{\rho^2} + \frac{R\rho}{2}(K'_M + K''_M), \quad (3.1)$$

где

$$K'_M = \left[\alpha\sin\alpha - \frac{\pi}{2} + (B+1)\cos\alpha\right]\cdot\frac{1}{\pi}, \quad (3.2)$$

$$K''_M = -\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right), \quad (3.3)$$

$$N = \frac{R}{2}(K'_N + K''_N), \quad (3.4)$$

где

$$K'_N = \frac{1}{2}, \quad (3.5)$$

$$K''_N = -\frac{1}{2}, \quad (3.6)$$

$$Q = \frac{R}{2}(K^1_Q + K''_Q), \quad (3.7)$$

где

$$K'_Q = B/\pi, \tag{3.8}$$

$$K''_Q = \frac{1}{2\pi}, \tag{3.9}$$

$$w = \frac{R\rho^3}{2EI}(K'_W + K''_W), \tag{3.10}$$

где

$$K'_w = \frac{(B+1)}{\pi}\cos\alpha + \left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\alpha - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\cdot\cos\alpha\right), \tag{3.11}$$

$$K''_w = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}, \tag{3.12}$$

$$v = \frac{R\rho^3}{2EI}(K'_v + K''_v), \tag{3.13}$$

где

$$K'_v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - \frac{1}{2\pi} + (B+1)\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{\pi}\right) + \tag{3.14}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha - \frac{1}{\pi}\right) + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}(\alpha\sin\alpha - \cos\alpha)\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$K''_v = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11}{4\pi}\right), \tag{3.15}$$

$$\gamma = \frac{P\rho^2}{2EI}(K'_\gamma + K''_\gamma), \tag{3.16}$$

где

$$K'_\gamma = -\frac{5}{2\pi} + (B+1)\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}, \tag{3.17}$$

$$K''_\gamma = \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

В этих формулах первый коэффициент соответствует схеме нагружения обода сателлита *б* (рис. 27), а второй коэффициент — действию равнодействующей реактивных сил на участке контакта обода и оси сателлита.

Перемещение точки приложения тангенциальной (окружной) силы P в зубчатом зацеплении сателлита с одним из центральных колес, обусловленное податливостью обода сателлита, происходящее в торцевой плоскости, может быть определено по формуле

$$\Delta_n = w\sin\alpha_S + (v + h_з\gamma)\cos\alpha_S. \tag{3.19}$$

По аналогии с (4.3.2) определим удельную податливость обода сателлита как отношение перемещения Δ_n к удельной нормальной нагрузке на профиле зуба $P_n = P/B$

$$\delta_{об} = \frac{\Delta_n}{p_n} = \frac{B}{P}[w\sin\alpha_S\cos\alpha_S + (v + h_з\gamma)\cos^2\alpha_S]. \tag{3.20}$$

Поскольку в данном случае несобственные податливости по радиальному перемещению в сечениях приложения усилий от зубчатых зацеплений также равны нулю, то формула для удель-

ной податливости обода сателлита имеет прежний вид

$$\delta'_{об} = \frac{6}{E(H_0/\rho)^3 K_I}(K_w \sin^2 \alpha_S + K_v \cos^2 \alpha_S). \qquad (3.21)$$

Формула (3.21) позволяет определять податливость обода сателлита, обусловленную деформацией его только под действием усилий от зубчатых зацеплений. Для полного представления о податливости обода сателлита к величене $\delta'_{об}$, определенной по формуле (3.21), следует добавить величину $\delta''_{об}$, определенную по формуле (3.20), подстановкой в нее выражений для упругих перемещений обода сателлита под действием реактивной нагрузки в месте контакта обода с осью сателлита из формул (3.10—3.18).

$$\delta''_{об} = \frac{6}{E(H_0/\rho)^3 K_I}(K_w \sin \alpha_S \cos \alpha_S + K_v \cos^2 \alpha_S), \qquad (3.22)$$

где

$$K_w = K'_w + K''_w, \quad [\text{см. } (11)—(12)],$$

$$K_v = (K'_v + K''_v) + \frac{h_з}{\rho}(K'_\gamma + K''_\gamma).$$

Структурные формулы для определения коэффициентов перемещений, входящих в (3.21), имеют вид

$$K_w = K_w(\pi/2), \; K_v = K_{vP}(\pi/2) + [K_{vM}(\pi/2) + K_{\gamma P}(\pi/2)]\, h/\rho + \\ + K_{\gamma M}(\pi/2)(h/\rho)^2, \qquad (3.23)$$

где коэффициенты перемещений приведены в табл. 25.

Из формулы (3.23) следует, что коэффициент тангенциальных перемещений обода сателлита зависит от расположения точки контакта на профиле зуба $h_з$. Поскольку отношение $h_з/\rho$ для обода сателлита планетарного механизма значительно больше, чем для обода эпицикла, то в данном случае следует ожидать значительно большего изменения по фазе однопарного зацепления податливости обода сателлита, чем при деформации обода эпицикла.

Для зубчатого колеса с наружным зубчатым венцом знаки тангенциальной (окружной) силы и сосредоточенного изгибающего момента одинаковы, поэтому в формуле (3.23)

$$K_{vM}(\pi/2) = -K_{\gamma P}(\pi/2),$$

и окончательно формула для коэффициента тангенциальных смещений под действием усилий от зубчатых зацеплений примет вид

$$K_v = K_{vP}(\pi/2) + K_{\gamma M}(\pi/2)(h/\rho)^2. \qquad (3.24)$$

Сказанное выше о периодическом изменении по фазе зацепления податливости обода эпицикла в равной мере относится и к ободу сателлита.

Глава 6. ДЕФОРМАЦИЯ ОБОДЬЕВ ШЛИЦЕВЫХ МУФТ

Шлицевые соединения применяются в планетарных механизмах для соединения центральных колес с сопряженными деталями, поэтому шлицевые муфты являются одним из основных элементов уравнительных механизмов планетарных редукторов. Конструктивное исполнение и условия нагружения шлицевых муфт в значительной мере зависят от того, к уравнительному механизму какого центрального колеса они относятся.

Шлицевые муфты уравнительного механизма эпицикла выполняются в виде тонких цилиндрических оболочек и под действием усилий от сателлитов подвержены нагружению усилиями в шлицах, изменяющихся по периодическому закону с числом периодов, равным числу сателлитов. Шлицевые муфты уравнительного механизма солнечной шестерни выполняются в виде тонкостенных труб или коротких цилиндрических оболочек и при наличии перекоса осей соединяемых муфт подвержены нагружению усилиями в шлицах, изменяющихся по периодическому закону, с числом периодов, равным двум.

Представляется целесообразным раздельно рассмотреть деформированное состояние ободьев шлицевых муфт уравнительных механизмов эпицикла и солнечной шестерни, поскольку расчет их имеет некоторые специфические особенности.

§ 1. Расчетная модель шлицевых муфт

Как видно из рис. 32, шлицевые муфты уравнительного механизма эпицикла проектируются обычно в виде оболочек, состоящих из сопряженных между особой цилиндрических поясов и колец (шлицевых венцов), имеющих повышенную изгибную жесткость. В сопряжениях таких оболочек возникают краевые силы и моменты, для определения которых составная оболочка при расчете разбивается на элементы и рассматриваются условия совместимости деформаций в местах их сопряжения.

На рис. 32 приведены расчетные схемы при определении податливости различных конструкций шлицевых муфт уравнительного механизма эпицикла, из которых видно, что муфты представляются в виде чередующихся колец и цилиндрических оболочек. Расчеты показывают, что для всех видов шлицевых муфт уравнительных механизмов эпициклов параметр оболочки $kl < 3$, поэтому они должны быть отнесены к классу коротких оболочек, и при определении перемещения на одном торце нельзя

пренебрегать влиянием сил и моментов, приложенных к другому торцу муфты.

В общем случае на муфту действуют следующие составляющие нагрузки от шлицевого венца:

тангенциальная сила $p = M_{кр} \cos \alpha_ш / 2\pi R_0^2$;
радиальная сила $r = p \operatorname{tg} \alpha_ш$;
осевая сила $q = p \operatorname{tg} \beta_{и1}$;
изгибающий момент $m_1 = pc$;
изгибающий момент $m_2 = qc = ph \operatorname{tg} \beta_ш$,

где $M_{кр}$ — крутящий момент, передаваемый шлицевым соединением, R_0 — радиус основной окружности шлицевого венца.

Закон изменения нагрузки по шлицам может быть принят в виде

$$p = \bar{p} + p_1 \cos(\theta + \gamma_1) + p_z \cos z_c \theta. \qquad (1.1)$$

Составляющая p_1 определяется первой гармоникой кривой зазоров в шлицевом соединении, определяемой погрешностью шлицевых венцов по окружным шагам, а составляющая p_z — перегрузкой шлицов, обусловленной различной деформативностью сопряженных муфт. Значит, суммарная нагрузка на шлицах зависит от податливости муфт (p_z), поэтому для решения задачи о деформативности шлицевых муфт необходимо предварительно задаться величиной перегрузки шлицов p_z.

Шлицевые муфты уравнительного механизма солнечной шестерни конструктивно выполняются в виде коротких оболочек с защемленным торцом или же в виде длинных оболочек. Второй торец муфты заканчивается шлицевым венцом, который может быть представлен как кольцо, имеющее повышенную изгибную жесткость по сравнению с жесткостью самой оболочки.

Условия нагружения шлицевых муфт уравнительного механизма солнечной шестерни в основном определяются перекосом осей сопрягаемых муфт. При этом следует различать два характерных случая,— нагрузку передают все или только часть шлицов соединения.

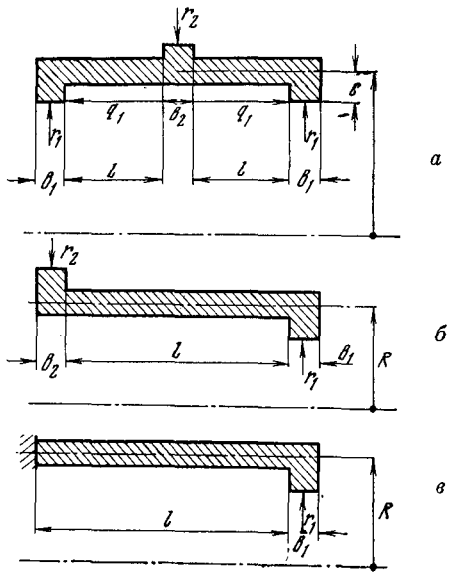


Рис. 32. Расчетная схема обода зубчатой муфты. Блокирующая муфта (*а*) и соединительная муфта *1* (*б*), соединительная муфта *2* (*в*)

Первый случай имеет место при малых углах перекоса осей муфт и больших крутящих моментах, передаваемых шлицевым соединением.

Второй случай реализуется при больших углах перекоса осей муфт и небольших крутящих моментах, передаваемых шлицевым соединением.

Составляющие нагрузок на шлицах аналогичны приведенным выше, однако в зависимости от исполнения шлицов (с прямолинейной или бочкообразной образующими) распределение нагрузки на работающих шлицах будет различным. Для шлицов с прямолинейной образующей изменение зазоров, обусловленное перекосом осей шлицевых муфт, происходит по закону $\cos\theta$, а для шлицов с бочкообразной образующей изменение зазоров подчиняется закону $\cos^2\theta$[4].

При нагрузке, воспринимаемой всеми шлицами соединения, закон изменения нагрузки, действующей на обод шлицевой муфты, имеет вид [4]

$$P_{in} = \bar{P} + P_1 \cos\theta_i + P_2\left(\cos\theta_i - \frac{2}{\pi}\right), \tag{1.2}$$

где $\bar{P}$ — средняя (расчетная) нагрузка, действующая на шлиц; P_1 — нагрузка на шлиц, обусловленная погрешностью шлицевых венцов по окружным шагам,

$$P_1 = C_ш\left(e + \delta t_\Sigma \cdot \sin\frac{\Delta\gamma}{2}\right), \tag{1.3}$$

P_2 — нагрузка на шлиц, обусловленная перекосом осей сопрягаемых муфт

$$P_2 = C_ш \cdot \frac{B\cdot\omega}{2}\,\mathrm{sign}\cos\theta_i, \tag{1.4}$$

$C_ш$ — линейная жесткость шлица; B — ширина шлицевого венца; ω — угол перекоса осей муфт; e — относительное радиальное смещение сопрягаемых шлицевых муфт; δt_Σ — накопленная погрешность окружных шагов шлицевых венцов; $\Delta\gamma$ — сдвиг по фазе между плоскостью перекоса осей муфт и кривой δt_Σ.

В формуле (1.4) сохранен знак $\cos\theta_i$, поскольку при перекосе осей сопрягаемых муфт оказываются нагруженными две зоны зубьев.

Выражение (1.2) справедливо для шлицов с прямолинейной образующей. Если шлицы имеют бочкообразную форму, то закон изменения нагрузки по шлицам примет вид

$$P_{iб} = \bar{P} + P_1 \cos\theta_i + P_2\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_i\right), \tag{1.5}$$

где

$$P_1 = C_ш\left(e + \delta t_\Sigma \cdot \sin\frac{\Delta\gamma}{2}\right), \tag{1.3}$$

$$P_2 = C_ш\frac{R\omega^2}{2}, \tag{1.6}$$

R — радиус криволинейной образующей шлица.

Если нагрузку воспринимают не все шлицы, а только часть из них, характеризуемая углом θ_z, то закон распределения нагрузки по шлицам значительно усложняется [4]. В частном случае, когда учитывается только перекос осей сопрягаемых муфт, распределение нагрузки по шлицам подчиняется следующему закону:

$$P_{in} = \bar{P}\frac{z_ш}{z} + P_2\left(\cos\theta_i - \frac{\sin\theta_z}{\theta_z}\right) \tag{1.7}$$

и

$$P_{iб} = \bar{P}\frac{z_ш}{z} + P_2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\theta z}{2\theta z}\right) - \sin^2\theta_i\right], \tag{1.8}$$

где θ_z — координата пары шлицов, последней вступившей в контакт, но еще не воспринявшей нагрузки; z — число шлицов, воспринимающих нагрузку; $z_ш$ — полное число шлицов в соединении.

Естественно, что при $z_ш = z$, $\theta_z = \pi/2$ и формулы (1.7), (1.8) обращаются в формулы (1.2), (1.5).

Характерно, что угол θ_z, определяющий зону нагруженных шлицов, зависит от крутящего момента, передаваемого шлицевым соединением, углом перекоса осей сопрягаемых муфт, деформативностью шлицов и ободьев шлицевых муфт. Это, с одной стороны, вызывает необходимость при строгом решении задачи о деформативности ободьев шлицевых муфт учитывать совместное деформирование элементов уравнительных механизмов, а с другой — определяет необходимость экспериментального исследования напряженного и деформированного состояний шлицевых муфт с целью внесения корректировочных коэффициентов в структурные формулы для упругих перемещений ободьев шлицевых муфт.

Строгое решение задачи о деформативности ободьев шлицевых муфт уравнительных механизмов планетарных редукторов с учетом особенностей конструктивного исполнения муфт и характера их нагружения связано со значительными трудностями. Поэтому в работе [8], например, применительно к шлицевым муфтам уравнительного механизма эпицикла были приняты допущения, которые позволили разработать методику расчетного определения деформативности ободьев шлицевых муфт.

Поскольку ободья шлицевых муфт данного типа относятся к классу коротких оболочек, то для определения их деформации можно поступить следующим образом. При нахождении кольцевой жесткости ободьев шлицевых муфт, характеризующей их радиальную деформацию, они могут рассматриваться как кольца.

В этом случае, однако, останется неопределенной изгибная жесткость ободьев муфт, характеризующая непостоянные по продольному сечению радиальные перемещения точек. Поэтому для определения осевого прогиба ободьев шлицевых муфт их следует рассматривать как короткую цилиндрическую оболочку, подкрепленную кольцами повышенной жесткости.

Упрощение решения в данном случае достигается тем, что суммарная нагрузка на шлицах в виде (1.1) учитывается только при определении кольцевой жесткости ободьев шлицевых муфт, а при нахождении осевого прогиба муфт можно ограничиться рассмотрением только осесимметричного нагружения их в сечениях, где приложены нагрузки от шлицевых венцов.

Данное в [8] решение задачи о деформативности ободьев шлицевых муфт уравнительного механизма эпицикла, полученное с учетом указанных допущений. Однако как видно из приведенного расчета, решение имеет достаточно громоздкий вид, что связано с попыткой учесть различную изгибную жесткость колец (шлицевых венцов) и оболочек.

В связи с этим ниже дается упрощенный метод расчета деформативности ободьев шлицевых муфт, в котором пренебрегается повышенной жесткостью шлицевых венцов. Хотя задача о тонкой упругой оболочке при произвольных нагрузках и граничных условиях на торцах принципиально решена [20, 42, 73], однако решение ее весьма громоздко, поэтому упрощение задачи с учетом конструктивного исполнения ободьев шлицевых муфт вполне оправдано.

§ 2. Периодическая деформация шлицевых муфт

Периодическая деформация ободьев шлицевых муфт уравнительного механизма эпицикла может быть определена из известных решений, полученных для тонкого кольца. Если нагрузка p, действующая на замкнутое круговое кольцо, является периодической функцией от угла θ, то радиальное w и тангенциальное v перемещения его также должны быть периодическими функциями этого угла. Ограничиваясь случаем, когда нагрузка является четной функцией от угла θ, получим

$$p = \bar{p} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos k\theta, \tag{2.1}$$

где p_k — некоторые заданные константы, определяемые из разложения функции p в ряд Фурье.

Принятие зависимости для нагрузки p в виде (2.1), очевидно, соответствует предположению, что первая гармоника кривой зазоров в шлицевом соединении совпадает по фазе с z_c-ой гармоникой, обусловленной деформативностью ободьев шлицевых муфт.

Поскольку, однако, при вращении сателлитов фаза z_c-ой гармоники кривой зазоров изменяется, то условие (2.1) справедливо только для определенного момента времени.

Известно [52], что равномерная радиальная нагрузка кольца $\bar{r}$ вызывает равномерное же растяжение кольца определяемой формулой

$$w = \bar{r} \Big/ \left(\frac{EF}{\rho^2} + \frac{EF}{\rho^4}\right), \quad v = 0. \tag{2.2}$$

Вся остальная радиальная нагрузка (кроме первой гармоники r_1) вызывает у кольца изгиб, происходящий без растяжения нейтральной линии кольца и определяемый формулами

$$w_и = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^4}{EI} \cdot \frac{r_k \cos k\theta}{(k^2-1)^2}, \qquad v_и = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^4}{EI} \cdot \frac{r_k \sin k\theta}{k(k^2-1)^2}. \tag{2.3}$$

Подстановка упругих перемещений w и v из (3) в (1.4) дает следующее выражение для угла поворота сечения кольца

$$\gamma_и = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^3}{EI} \cdot \frac{r_k \sin k\theta}{k(k^2-1)^2}. \tag{2.4}$$

Если на кольцо действуют периодически изменяющиеся изгибающие моменты, то, дифференцируя уравнения (3) и (4), получим

$$w_и = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^3}{EI} \cdot \frac{m_k \sin k\theta}{k(k^2-1)}, \qquad v_и = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^3}{EI} \cdot \frac{m_k \cos k\theta}{(k^2-1)^2},$$

$$\gamma_и = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^2}{EI} \cdot \frac{m_k \cos k\theta}{(k^2-1)}. \tag{2.5}$$

Что же касается первой гармоники радиальной нагрузки r_1, то ее влияние на деформацию кольца может быть учтено непосредственно по методу элементарной нагрузки с помощью формул табл. 7.

$$w_1 = \frac{\bar{r}\rho^4}{EI} \cdot m_{wR}, \qquad v_1 = \frac{\bar{r}\rho^4}{EI} \cdot m_{vR}, \qquad \gamma_1 = \frac{\bar{r}\rho^3}{EI} \cdot m_{\gamma R}. \tag{2.6}$$

Сохраняя в разложении (2.1) первую и z_c-ую гармоники, получим выражения для радиальной деформации кольца

$$w_\Sigma = \frac{\bar{r}\rho^2}{EF}\left[\frac{1}{1+\frac{I}{F\rho^2}} + \frac{E\rho^2}{I}\left(\frac{r_1}{\bar{r}} m_{wR} + \frac{r_{zc}}{\bar{r}} \cdot \frac{\cos z_c\theta}{(z_c^2-1)^2}\right)\right]. \tag{2.7}$$

Аналогично можно записать выражения для остальных составляющих упругой линии кольца.

Периодическую деформацию ободьев шлицевых муфт уравнительного механизма солнечной шестерни будем искать на

основе известных решений, полученных для тонких упругих оболочек. Поскольку в данном случае имеется две зоны нагружения ободьев шлицевых муфт, то в качестве элементарных воспользуемся решениями, полученными для случая нагружения оболочки двумя диаметрально расположенными сосредоточенными нагрузками.

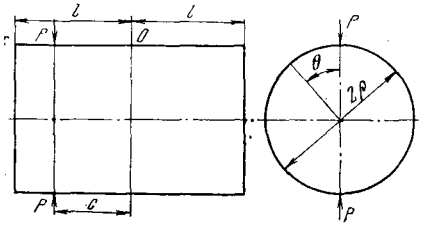


Рис. 33. Расчетная схема обода зубчатой муфты

В работе [65] получено решение для цилиндрической оболочки, подверженной действию двух диаметрально расположенных радиальных сосредоточенных сил, в предположении, что растяжением срединной поверхности оболочки можно пренебречь. Выражения для упругих перемещений точек оболочки (рис. 33) при этих условиях имеют вид

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{R\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]} \cdot \frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2}, \\
v &= \frac{R\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \cdot \frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)^2}, \\
w &= \frac{R\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где R — радиальная нагрузка; ρ — радиус срединной поверхности оболочки; l — половина длины оболочки; c — координата точки приложения радиальной силы R (отсчитывается от среднего сечения оболочки); x — координата рассматриваемой точки (отчитывается от среднего сечения оболочки); D — цилиндрическая жесткость оболочки; $D = EH_0^3/12(1-\nu^2)$; H_0 — толщина оболочки.

В работе [82] для оболочки, защемленной на одном торце, и нагруженной парой диаметрально расположенных тангенциальных сил P методом, изложенным в работе [65], получены упругие перемещения в предположении, что срединная поверхность оболочки нерастяжима. Выражения для упругих перемещений точек оболочки при этих условиях имеют вид

$$
u = \frac{P\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]} \cdot \frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)^2},
$$

$$v = \frac{P\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2 cx}{\left[\frac{1}{3} k^2 l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \frac{\cos k\theta}{k^2(k^2-1)^2}, \qquad (2.9)$$

$$w = -\frac{P\rho^3}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2 cx}{\left[\frac{1}{3} k^2 l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)^2}.$$

Поскольку тангенциальное усилие, действующее на шлицы, приложено на некотором расстоянии $h_ш$ от срединной поверхности оболочки, то, перенося силу P на срединную поверхность, получим изгибающий момент $M = P \cdot h_ш$. Действие этого момента можно учесть, если продифференцировать (8) по θ. Тогда получим следующие выражения для упругих перемещений точек оболочки:

$$u = \frac{M\rho^2}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3} k^2 l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]} \frac{k \sin k\theta}{(k^2-1)^2},$$

$$v = -\frac{M\rho^2}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2 cx}{\left[\frac{1}{3} k^2 l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2}, \qquad (2.10)$$

$$w = \frac{M\rho^2}{\pi D l} \sum_{k=2,4,6\ldots} \left\{1 + \frac{k^2 cx}{\left[\frac{1}{3} k^2 l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\} \frac{k \sin k\theta}{(k^2-1)^2}.$$

Приведенные формулы можно использовать для случая, когда нагрузка равномерно распределена по длине шлица $b_ш$, расположенного со стороны свободного торца. Для этого можно воспользоваться принципом наложения. Полагая, что нагрузка равномерно распределена по длине шлица, можно найти прогиб в точке с координатой x, произведенный элементарной силой $qd\xi$, приложенной на расстоянии от этой точки.

Интегрируя затем выражение для прогиба от элементарной силы, найдем перемещения точек оболочки в виде (2.8) — (2.10), где под c следует понимать расстояние от среднего сечения оболочки до среднего сечения шлицевого венца, т. е.

$$c = l - \frac{B_ш}{2}. \qquad (2.11)$$

Таким образом, выражения (2.8) — (2.10) с учетом (2.11) могут быть использованы для определения упругих перемещений ободьев шлицевых муфт под действием сосредоточенных усилий.

Формулы (2.8) — (2.10) справедливы для случая, когда нагрузка приложена в сечениях $\theta = 0$ и π. Если рассматриваемая пара сил действует в сечениях $\theta = \varphi$ и $\pi + \varphi$, то в формулах (2.8) — (2.10) вместо угла θ следует положить $\theta - \varphi_i$.

Поскольку на обод шлицевой муфты от шлицевого венца действует система сил, распределенных на участке от $-\theta_z$ до θ_z, то для определения суммарных упругих перемещений обода муфты следует просуммировать действие каждой из сил. При этом необ-

ходимо учесть, что нагрузка по шлицам распределяется неравномерно и подчиняется зависимостям (1.2), (1.5), (1.7) и (1.8). Суммируя действие отдельных «элементарных» нагрузок, необходимо образовать следующие суммы:

для шлицов с прямолинейной образующей

$$\sum_{i=0}^{z_ш/4}\left[\bar{P}+P_2\left(\cos\theta_i-\frac{2}{\pi}\right)\right]\sin k(\theta-\theta_i),\qquad(2.12)$$

$$\sum_{i=0}^{z}\left[\bar{P}+P_2\left(\cos\theta_i-\frac{\sin\theta_z}{\theta_z}\right)\right]\sin k(\theta-\theta_i),$$

для шлицов с бочкообразной образующей

$$\sum_{i=0}^{z_ш/4}\left[\bar{P}+P_2\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_i\right)\right]\sin k(\theta-\theta_i),$$

$$\sum_{i=0}^{z}\left[\bar{P}+P_2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin^2\theta_z}{2\theta_z}\right)-\sin^2\theta_i\right)\right]\sin k(\theta-\theta_i).\qquad(2.13)$$

Кроме этого, должны быть образованы суммы, аналогичные (2.12) и (2.13) с заменой $\sin k(\theta-\theta_i)$ на $\cos k(\theta-\theta_i)$. Заменяя суммирование интегрированием, получим следующие выражения для сумм, входящих в (2.12) и (2.13)

$$\Sigma\sin k(\theta-\theta_i)\approx\sin k\theta\cdot\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z},$$

$$\Sigma\cos k(\theta-\theta_i)\approx\cos k\theta\cdot\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z},$$

$$\Sigma\cos\theta_i\sin k(\theta-\theta_i)\approx\sin k\theta\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-1)\theta_z}{(k-1)\theta_z}+\frac{\sin(k+1)\theta_z}{(k+1)\theta_z}\right],\qquad(2.14)$$

$$\Sigma\cos\theta_i\cos k(\theta-\theta_i)\approx\cos k\theta\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-1)\theta_z}{(k-1)\theta_z}+\frac{\sin(k+1)\theta_z}{(k+1)\theta_z}\right],$$

$$\Sigma\sin^2\theta_i\sin k(\theta-\theta_i)\approx\sin k\theta\cdot\frac{1}{4}\left[2\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}-\frac{\sin(k-2)\theta_z}{(k-2)\theta_z}-\frac{\sin(k+2)\theta_z}{(k+2)\theta_z}\right],$$

$$\Sigma\sin^2\theta_i\cos k(\theta-\theta_i)\approx\cos k\theta\cdot\frac{1}{4}\left[2\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}-\frac{\sin(k-2)\theta_z}{(k-2)\theta_z}-\frac{\sin(k+2)\theta_z}{(k+2)\theta_z}\right].$$

Формулы (2.14) соответствуют случаю, когда нагрузку воспринимают z из $z_ш$ шлицов. Полагая в (2.14) $z=z_ш$ и $\theta_z=\pi/2$,

получим соответствующие суммы для случая, когда нагрузку воспринимают все шлицы соединения.

$$\Sigma \sin k(\theta-\theta_i) = \sin k\theta \cdot \frac{1}{k}\cdot\frac{2}{\pi},$$

$$\Sigma \cos k(\theta-\theta_i) = \cos k\theta \cdot \frac{1}{k}\cdot\frac{2}{\pi},$$

$$\Sigma \cos\theta_i \sin k(\theta-\theta_i) = \sin k\theta \cdot \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{\left(\frac{k}{2}+1\right)}}{(k^2-1)},$$

$$\Sigma \cos\theta_i \cos k(\theta-\theta_i) = \cos k\theta \cdot \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{\left(\frac{k}{2}+1\right)}}{(k^2-1)}, \qquad (2.15)$$

$$\Sigma \sin^2\theta_i \sin k(\theta-\theta_i) = 0,$$

$$\Sigma \sin^2\theta_i \cos k(\theta-\theta_i) = 0.$$

Полученные формулы позволяют найти выражения для упругих перемещений ободьев шлицевых муфт уравнительного механизма солнечной шестерни. Для случая, когда нагрузку воспринимает только часть шлицов,

$$u = \frac{\overline{R}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\cdot\frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2},$$

$$v = \frac{\overline{R}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)^2}, \qquad (2.16)$$

$$w = \frac{\overline{R}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2};$$

$$u = \frac{\overline{P}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\cdot\frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)},$$

$$v = \frac{\overline{P}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{\cos k\theta}{k^2(k^2-1)^2}, \qquad (2.17)$$

$$w = -\frac{\overline{P}\rho^3}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{\sin k\theta}{k(k^2-1)};$$

$$u = \frac{\overline{M}\rho^2}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \frac{\rho c}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\cdot\frac{k\sin k\theta}{(k^2-1)^2},$$

$$v = -\frac{\overline{M}\rho^2}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{\cos k\theta}{(k^2-1)^2},$$

$$w = \frac{\overline{M}\rho^2}{\pi D l}\sum_{k=2,4,6\ldots} C_k \left\{1+\frac{k^2cx}{\left[\frac{1}{3}k^2l^2 + 2(1-\nu)\rho^2\right]}\right\}\frac{k\sin k\theta}{(k^2-1)^2}. \qquad (2.18)$$

Коэффициент C_k, входящий в формулы (16) — (18), приведен в табл. 26.

Таблица 26. **Значения коэффициента C_k, входящего в формулы (2.16) — (2.18).**

Тип шлицов	Тип нагружения шлицов	Формула
С прямолинейной образующей	Нагружена часть шлицов z	$\frac{z_ш}{z}\cdot\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}-\frac{B\omega}{2\Delta_ш}\cdot\frac{1}{2}\left[2\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}\cdot\frac{\sin\theta_z}{\theta_z}-\frac{\sin(k-1)\theta_z}{(k-1)\theta_z}-\frac{\sin(k+1)\theta_z}{(k+1)\theta_z}\right]$
	Нагружены все шлицы $z_ш$	$\frac{2}{k\pi}-\frac{B\omega}{2\Delta_ш}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{\left(\frac{k}{2}+1\right)}}{(k^2-1)}$
С криволинейной образующей	Нагружена часть шлицов z	$\frac{z_ш}{z}\cdot\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}-\frac{R\omega^2}{2\Delta_ш}\cdot\frac{1}{4}\left[2\frac{\sin k\theta_z}{k\theta_z}\cdot\frac{\sin 2\theta_z}{2\theta_z}-\frac{\sin(k-2)\theta_z}{(k-2)\theta_z}-\frac{\sin(k+2)\theta_z}{(k+2)\theta_z}\right]$
	Нагружены все шлицы $z_ш$	$2/k\pi$

Таким образом, формулы (2.16) — (2.18) совместно с табл. 26 дают возможность определять деформативность обода шлицевой муфты уравнительного механизма солнечной шестерни при перекосе осей сопрягаемых муфт и при различном конструктивном исполнении шлицов. Если потребуется определить дополнительное смещение шлицов, обусловленное податливостью обода шлицевой муфты, то полученные упругие перемещения необходимо спроектировать на нормали к профилям шлицов в соответствии с (4.3.1).

Приведенные формулы получены в предположении, что известно число шлицов z, передающих нагрузку. Поскольку z зависит не только от податливости ободьев шлицевых муфт, но и от деформации самих шлицов, то при решении задачи о распределении нагрузки между шлицами необходимо учитывать оба фактора. Приведенные формулы следует рассматривать как вспомогательные зависимости, необходимые для решения задачи о совместном деформировании и нагружении элементов шлицевого соединения.

§ 3. Осесимметричная деформация шлицевых муфт

В работе [8] получено решение задачи об осесимметричной деформации ободьев шлицевых муфт уравнительного механизма эпицикла. При этом рассматривалась изгибная деформация ободьев муфт, сопровождаемая искривлением их образующих под действием усилий, приложенных к торцам муфт от шлицевых венцов.

Приведенные в [8] уравнения позволяют решать задачу о напряженном и деформированном состоянии ободьев шлицевых муфт при произвольном соотношении жестокостей оболочек и колец (шлицевых венцов).

Практическое использование данного метода расчета связано с вычислительными трудностями, поскольку приходится решать достаточно сложные системы алгебраических уравнений, поэтому представляется целесообразным поиск обоснованных упрощений расчета.

Применительно к планетарным механизмам вполне обоснованным упрощением является пренебрежение различной жесткостью колец (шлицевых венцов) и оболочек. Это связано, во-первых, с тем, что шлицевый венец начинается непосредственно от внутреннего диаметра оболочки, поэтому его эффективная толщина незначительно превосходит толщину оболочки, а, во-вторых, взаимное деформирование элементов уравнительных механизмов не позволяет аналитическим путем получить точное решение о напряженном и деформированном состоянии шлицевых муфт. В связи с этим аналитические методы позволяют получать лишь структурные формулы, корректировка которых должна проводиться на основе специально поставленных экспериментальных исследований. Кроме того, раздельное рассмотрение периодической и осесимметричной деформации ободьев шлицевых муфт является серьезным допущением, поэтому, приняв его, нецелесообразно проводить дальнейший расчет с точностью, большей соответствующей этому допущению.

В связи с этим, пренебрежение различной толщиной колец и оболочек является достаточно обоснованным и вместе с тем значительно упрощает расчет. Упрощение достигается благодаря тому, что отпадает необходимость удовлетворения уравнениям совместности деформаций сопряженных участков. Это позволяет использовать известные решения о цилиндрических оболочках при осесимметричном нагружении [16].

Для блокирующей муфты (рис. 32, *а*) можно рассмотреть деформацию короткой цилиндрической оболочки, нагруженной на одном торце равномерно распределенными радиальными силами, а на втором торце имеющей заделку, препятствующую повороту сечения. Такой вид заделки оболочки учитывает то обстоятельство, что в связи с симметричным нагружением блокирующей муфты ее среднее сечение не поворачивается. Расчетные формулы для перемещения, угла поворота сечения и изгибающего момента,

имеют вид [16]

$$w_{(x)} = \frac{\bar{r}}{Dk^3}\,[\varphi_1 V_0(kx) - \psi_1 V_1(kx) + V_3(kx)],$$

$$\vartheta_{(x)} = \frac{\bar{r}}{Dk^2}\,[-4\varphi_1 V_3(kx) - \psi_1 V_0(kx) + V_2(kx)],$$

$$M_{(x)} = \frac{\bar{r}}{k}\,[-4\varphi_1 V_2(kx) + 4\psi_1 V_3(kx) + V_1(kx)],$$

где

$$\varphi_1 = \frac{V_0^2(kl) + 4V_2^2(kl)}{4\,[V_1(kl)\,V_0(kl) + 4V_2(kl)\,V_3(kl)]},$$

$$\psi_1 = \frac{V_1(kl)\,V_2(kl) - V_0(kl)\,V_3(kl)}{V_1(kl)\,V_0(kl) + 4V_2(kl)\,V_3(kl)}.$$

$V_i(kl)$ — функции А. Н. Крылова по параметру kl

$$k = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu^2)}{\rho^2 H^2}}, \qquad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}.$$

В сечении, где приложены радиальные усилия ($x = 0$), w и v принимают следующие значения

$$w_{(0)} = \varphi_1 \frac{\bar{r}}{Dk^3}, \qquad v_{(0)} = -\psi_1 \frac{\bar{r}}{Dk^2}.$$

Если в шлицевом соединении эпицикл — блокирующая муфта шлицы наклонные, то в соединении возникают осевые силы и связанные с их внецентровым приложением изгибающие моменты. Действие осевых сил на величину перемещения w может быть учтено по формуле $w^* = -\nu\bar{q}/4k^4\rho_0 D$, а действие равномерно распределенного изгибающего момента $M = T_1 h_ш$ по формулам [16]

$$w_{(x)} = \frac{M}{Dk^2}\,[\varphi_2 V_0(kx) - \psi_2 V_1(kx) + V_2(kx)],$$

$$v_{(x)} = \frac{M}{Dk}\,[-4\varphi_2 V_3(kx) - \psi_2 V_0(kx) + V_1(kx)],$$

$$M_{(x)} = M\,[-4\varphi_2 V_2(kx) + 4\psi_2 V_3(kx) + V_0(kx)].$$

где

$$\varphi_2 = \frac{V_1(kl)\,V_2(kl) - V_0(kl)\,V_3(kl)}{V_0(kl)\,V_1(kl) + 4V_2(kl)\,V_3(kl)},$$

$$\psi_2 = \frac{V_1^2(kl) + 4V_3^2(kl)}{V_0(kl)\,V_1(kl) + 4V_2(kl)\,V_3(kl)}.$$

В сечении, где приложен изгибающий момент ($x = 0$), w и ϑ принимают следующие значения

$$w_{(0)} = \varphi_2 \frac{M}{Dk^2}, \qquad v_{(0)} = -\psi_2 \frac{M}{Dk}.$$

Совместное действие распределенных на торце радиальных сил и изгибающих моментов учтется суммированием результатов, полученных по приведенным формулам.

Для соединительной муфты *1* (рис. 32, *б*) решение задачи может быть получено из рассмотрения короткой цилиндрической оболочки, на одном торце которой приложена равномерно распределенная радиальная нагрузка, а другой торец свободен. Наложением двух решений, когда один торец нагружен радиальной силой $\bar{r}_1$, а другой торец — радиальной силой $\bar{r}_2$, можно получить искомое решение о деформации соединительной муфты. Согласно [16] расчетные формулы для w, ϑ и M имеют вид

$$w_{(x)} = \frac{\bar{r}_1}{Dk^3}\left[\varphi_3 V_0(kx) - \psi_3 V_1(kx) + V_3(kx)\right],$$

$$v_{(x)} = \frac{\bar{r}_1}{Dk^2}\left[-4\varphi_3 V_3(kx) - \psi_3 V_0(kx) + V_2(kx)\right],$$

$$M_{(x)} = \frac{\bar{r}_1}{k}\left[-4\varphi_3 V_2(kx) + 4\psi_3 V_3(kx) + V_1(kx)\right],$$

где

$$\varphi_3 = \frac{V_1(kl)\,V_2(kl) - V_0(kl)\,V_3(kl)}{4\left[V_2^2(kl) - V_1(kl)\,V_3(kl)\right]}, \qquad \psi_3 = \frac{V_1^2(kl) - V_0(kl)\,V_2(kl)}{4\left[V_2^2(kl) - V_1(kl)\,V_3(kl)\right]}.$$

Действие радиальных сил интенсивности $\bar{r}_2$ учтется аналогичными формулами, только вместо координаты x в них будет входить координата $x^* = l - x$ и знак поменяется на обратный. В этом случае перемещения на одном торце будут зависеть от усилий, действующих на обоих торцах, и расчетные формулы для них примут вид:

$$w_{(0)} = \varphi_3 \frac{\bar{r}_1}{Dk^3} - \frac{\bar{r}_2}{Dk^3}\left[\varphi_3 V_0(kl) - \psi_3 V_1(kl) + V_3(kl)\right],$$

$$v_{(0)} = -\psi_3 \frac{r_1}{Dk^2} - \frac{\bar{r}_2}{Dk^2}\left[-4\varphi_3 V_3(kl) - \psi_3 V_0(kl) + V_2(kl)\right].$$

Формулы для перемещения на другом торце имеют аналогичный вид, только в них следует поменять знак на обратный и поменять местами нагрузки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$.

Для соединительной муфты *2* (рис. 32, *в*) можно рассмотреть деформацию короткой цилиндрической оболочки, на одном торце которой действует равномерно распределенная радиальная нагрузка, а второй торец жестко заделан. В этом случае расчетные формулы для w, ϑ и M примут вид [16]

$$w_{(x)} = \frac{\bar{r}}{Dk^3}\left[\varphi_4 V_0(kx) - \psi_4 V_1(kx) + V_3(kx)\right],$$

$$v_{(x)} = \frac{\bar{r}}{Dk^2}\left[-4\varphi_4 V_3(kx) - \psi_4 V_0(kx) + V_2(kx)\right],$$

$$M_{(x)} = \frac{\bar{r}}{k}\left[-4\varphi_4 V_2(kx) + 4\psi_4 V_3(kx) + V_1(kx)\right],$$

где

$$\varphi_4 = \frac{V_1(kl)\,V_2(kl) - V_3(kl)\,V_0(kl)}{V_0^2(kl) + 4V_1(kl)\,V_3(kl)}, \qquad \psi_4 = \frac{V_0(kl)\,V_2(kl) + 4V_3^2(kl)}{V_0^2(kl) + 4V_1(kl)\,V_3(kl)}.$$

В сечении $x = 0$ перемещения w и ϑ равны

$$w_{(0)} = \varphi_4 \frac{\bar{r}}{Dk^3}, \qquad v_{(0)} = -\psi_4 \frac{\bar{r}}{Dk^2}.$$

Поскольку шлицевые муфты уравнительных механизмов центральных колес передают также крутящий момент, то следует учесть тангенциальные перемещения муфт. Рассматривая муфты как цилиндрические оболочки при осесимметричном кручении, определим тангенциальные смещения точек по формуле

$$v^* = \frac{2(1+\nu)}{EH_0}\,\bar{p}\,(l - x), \tag{3.1}$$

где p — интенсивность тангенциальных (окружных) сил в шлицевом соединении.

В шлицевых соединениях с наклонными шлицами возникают осевые силы, под действием которых происходит растяжение или сжатие блокирующей муфты (в зависимости от направления вращения передачи и знака угла наклона шлицов). Равномерная осевая нагрузка в шлицевом соединении вызывает осевую деформацию блокирующей муфты, равную

$$u^* = \frac{\bar{q}}{EH_0}(l - x), \tag{3.2}$$

где $\bar{q}$ — интенсивность равномерно распределенной осевой силы, x — координата точки, отсчитываемая от загруженного торца.

Составляющие упругих перемещений w_n и v_n под действием периодических нагрузок определены выше. При построении общего выражения для упругих перемещений шлицевых муфт примем, что найденные выше перемещения w_n и v_n имеют место на торцах, где приложены усилия от шлицов. По длине муфты они изменяются так же, как радиальные перемещения при осесимметричном нагружении муфты. В этом случае суммарное радиальное перемещение определится как сумма

$$w_\Sigma = [w_0(0) + w_n]\,F(x), \tag{3.3}$$

здесь $w_0(0)$ — радиальное перемещение муфты при осесимметричном нагружении в сечении $x = 0$, где действуют усилия от шлицов, определяются для соответствующей схемы нагружения, w_n — радиальное перемещение муфты при периодическом нагружении (2.3, 2.5).

Функция $F(x)$, характеризует изменение радиальных перемещений муфты по длине ее при осесимметричном нагружении.

Аналогично могут быть построены формулы для тангенциальных v_Σ и осевых u_Σ перемещений муфты. При этом периодическая составляющая v_n может быть определена из формул (2.3 и 2.5), а для нахождения u_n можно принять, что она равна

$$u_n = u^* \frac{q_n}{\bar{q}} \cos n\theta, \tag{3.4}$$

где q_n — перегрузка муфты, связанная с их деформацией. Компоненты упругих перемещений w_Σ, v_Σ и v_Σ должны удовлетворять уравнениям равновесия оболочки [73]. Построенные указанным образом упругие перемещения муфт, естественно, не удовлетворяют уравнениям равновесия оболочек, поэтому принятые при их записи допущения следует проверить экспериментальным путем.

Имея выражения для упругих перемещений муфт, можно получить формулы для внутренних усилий

$$\begin{aligned}
M_1 &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\rho^2}\left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right].\\
M_2 &= -D\left[\frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],\\
M_{12} &= M_{21} = -D(1-\nu)\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
N_1 &= \frac{EH_0}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho}\right)\right],\\
N_2 &= \frac{EH_0}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\rho} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right],\\
S &= \frac{EH_0}{2(1-\nu)}\left[\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

и напряжений в муфтах

$$\sigma_x = \frac{N_1}{H_0} + \frac{6}{H_0^2}M_1, \qquad \sigma_y = \frac{N_2}{H_0} + \frac{6}{H_0^2}M_2, \qquad \sigma_{xy} = \frac{S}{H_0} + \frac{6}{H_0^2}M_{12}. \tag{3.6}$$

§ 4. Экспериментальные исследования деформации ободьев шлицевых муфт

Определение податливости ободьев шлицевых муфт аналитическим путем представляет значительные трудности, так как наличие зазоров в шлицевых соединениях и связанное с этим относительное смещение профилей шлицов вызывает необходимость решать задачу в нелинейной постановке. Поэтому появляется

необходимость в разработке приближенного метода расчета податливости ободьев шлицевых муфт. Однако применительно к планетарным механизмам вопрос о характере деформирования шлицевых муфт не изучался ни в экспериментальном, ни в расчетном плане, поэтому не представляется возможным при составлении расчетной схемы учитывать более существенные факторы, в то же время пренебрегая менее существенными.

Выполненное выше аналитическое определение податливости шлицевых муфт основано на предположении о существовании силового контакта между двумя сопряженными муфтами

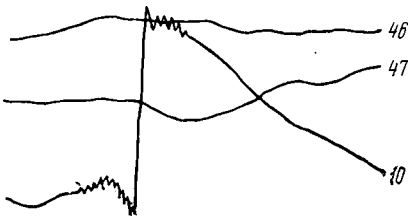


Рис. 34. Осциллограмма записи деформации эпицикла и блокирующей муфты

в любой момент времени. Однако этим предположением накладывается только верхнее граничное условие, заключающееся в том, что перемещение точки шлица ведомой муфты не может быть больше соответствующего перемещения сопряженной точки шлица ведущей муфты.

Существующее между сопряженными шлицами взаимное проскальзывание, не нарушая силового контакта между ними, влияет на деформативность ободьев шлицевых муфт. Поскольку проскальзывание профилей шлицов не было учтено при разработке аналитического метода определения деформативности ободьев шлицевых муфт, то на планетарном редукторе (рис. 1) совместно с тензометрированием ободьев эпициклов было выполнено также тензометрирование обода блокирующей муфты для сопоставления действительных величин деформаций тензодатчиков с расчетными величинами и оценки на основании этого точности разработанного выше приближенного метода расчета деформативности ободьев шлицевых муфт [8].

Анализ работы уравнительных механизмов планетарных редукторов [2] показал, что причиной появления контактной коррозии на профилях шлицов является относительное проскальзывание контактирующих поверхностей шлицов. Непосредственное определение относительных смещений сопряженных профилей шлицов экспериментальным путем представляет значительные трудности. Поэтому была предпринята попытка косвенным путем — по деформации элементов уравнительного механизма эпицикла — выявить наличие проскальзывания профилей контактирующих шлицов.

С этой целью эпициклы и блокирующая муфта тензометрировались при таком взаимном положении, при котором розетки тен-

зодатчиков на обоих элементах находились в одном сечении. На рис. 34 приведена осциллограмма одновременной записи деформации тензодатчиков, наклеенных на эпицикле и блокирующей муфте, из которой видно, что в то время как тангенциальный датчик 10 зарегистрировал резкое изменение деформации эпицикла, осевой 47 и окружной 46 датчики зарегистрировали плавный переход экстремальной величины деформации блокирующей муфты.

Плавное изменение деформации блокирующей муфты в момент, когда деформация эпицикла претерпевает скачок, указывает на то, что блокирующая муфта не связана жестко с эпициклом и поэтому не следует за ним в деформированном состоянии. Обнаруженная особенность совместного деформирования эпицикла и блокирующей муфты может быть объяснена наличием проскальзывания между профилями шлицов соединений уравнительных механизмов.

Действительно, если бы эпицикл и блокирующая муфта деформировали как единое целое и между шлицами не было бы проскальзывания, то, во-первых, эпюры деформаций тангенциального тензодатчика на эпицикле и окружного тензодатчика на блокирующей муфте были бы подобны; во-вторых, амплитуда деформаций первого из названных тензодатчиков была бы меньше, чем второго тензодатчика, так как он расположен на волокнах, менее удаленных от центра детали. Из осциллограммы (рис. 34) видно, что эпюры деформаций тензодатчиков на эпицикле и блокирующей муфте значительно отличаются друг от друга, а амплитуда деформаций первого из них в момент прохождения через сечение сателлита даже больше, чем второго тензодатчика, следовательно, относительное смещение профилей шлицов приводит к тому, что нагрузка от сателлитов, распределившись по некоторой зоне, не полностью передается на блокирующую муфту, в результате чего последняя претерпевает меньшую деформацию, чем эпицикл.

Анализ совместного деформирования элементов уравнительного механизма позволяет получить некоторые практические выводы для проведения вибрационных и жесткостных расчетов планетарных редукторов. Поскольку проскальзывание профилей шлицов приводит к тому, что охватывающая муфта деформирует в меньшей степени, чем охватываемая, то при составлении расчетной динамической схемы планетарного редуктора уравнительный механизм недопустимо рассматривать как единое целое. Несоблюдение этого условия может привести к погрешностям в определении спектра собственных частот колебаний редуктора.

Далее, при расчете деформативности элементов уравнительных механизмов (шлицевых муфт) недопустимо задаваться перемещениями на торцах, равными соответствующим перемещениям охватываемой детали (эпицикла), так как проскальзывание про-

филей шлицов, не нарушая силового контакта между ними, в то же время приводит к тому, что перемещения шлицов на сопряженных элементах отличаются друг от друга. Наконец, так как нагрузка распределяется по шлицам, а не полностью передается на шлицевые муфты уравнительного механизма, то при составлении расчетных схем для определения деформативности последних нельзя рассматривать муфты нагруженными сосредоточенными силами, равными усилиям на сателлитах [8].

При исследованиях была сделана попытка выявить зависимость между показаниями тензодатчиков и величинами зазоров между шлицами соединения эпицикл — блокирующая муфта, однако испытания показали, что, так же как и для эпицикла, деформации тензодатчиков практически не зависят от величин зазоров между шлицами. По-видимому, это связано с тем, что местные зазоры в шлицах оказывают влияние на деформацию блокирующей муфты только в непосредственной близости от шлицевого венца, и по мере удаления тензодатчика от места приложения нагрузки на него в меньшей мере влияет местное изменение нагрузки.

Согласно экспериментальным данным, относительные деформации, зарегистрированные тензодатчиками, хорошо описываются следующими функциями:

окружной тензодатчик:

$$\varepsilon_\theta = (1{,}0 + 6{,}0 \cos 3\theta) \cdot 10^{-6}, \tag{4.1}$$

осевой тензодатчик

$$\varepsilon_0 = -(8{,}0 + 2{,}5 \cos 3\theta) \cdot 10^{-6}, \tag{4.2}$$

наклонный тензодатчик

$$\varepsilon_{45} = -(13{,}0 + 4{,}0 \cos 3\theta) \cdot 10^{-6}. \tag{4.3}$$

Для определения расчетных напряжений в блокирующей муфте воспользуемся приведенными выше формулами. Изгибные напряжения при осесимметричном нагружении муфты могут быть определены из формулы (3.6). В зоне наклейки розетки тензодатчиков нормальные напряжения σ_0 от изгибающего момента M_1 равны $\sigma_{ом} = -32{,}2$ *кГ/см*^{2}, а от растягивающих усилий N_1 — $\sigma_{ом} = 8{,}98$ *кГ/см*^{2}.

При расчете шлицевых муфт было принято, что толщина оболочки и колец муфт одинакова, что и привело к завышению расчетных изгибных напряжений. Как показано в работах [36, 37], наличие на торце оболочки упругого кольца значительно повышает жесткость оболочки и снижает местный прогиб на 30 — 35%. Поскольку схема расчета и условия эксперимента в этих работах отличаются от таковых применительно к шлицевым муфтам планетарных механизмов, то до проведения специальных исследований в расчетные формулы для изгибных напряжений при осесимметричном нагружении введем коэффициент жесткости $k_I = 1{,}25$.

Тогда осевые изгибающие напряжения будут равны

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{OM}}{1,25} + \sigma_{ON} = -16,75 \ кГ/см^2. \tag{4.4}$$

Изгибающие напряжения в окружном направлении, обусловленные изменением муфтой правильной круговой формы, определяются по формуле

$$\sigma_\theta = \frac{E}{\rho}\left[v' - \frac{H_0}{\rho}\left(1 + \frac{H_0}{2\rho}\right)w'' - \left(1 + \frac{H_0}{2\rho} + \left(\frac{H_0}{2\rho}\right)^2\right)w\right],$$

которая после пренебрежения величиной $H_0/2\rho$ по сравнению с единицей примет следующий вид

$$\sigma_\theta = \bar{r}\frac{\rho}{F}\left[1 + \frac{r_k}{\bar{r}} \cdot \frac{H_0}{2\rho} \cdot \frac{\rho^2 \cdot F}{I} \cdot \frac{k^2}{(k^2-1)^2}\cos k\theta\right].$$

В этой формуле первое слагаемое учитывает равномерное растяжение муфты под действием равномерной составляющей радиальной нагрузки $\bar{r}$. Величина $\bar{r}$ в этой формуле принимается равной разности между радиальными нагрузками на шлицах соединений эпицикл — блокирующая муфта $r_{э-б}$ и блокирующая муфта — соединительная муфта $r_{б-с}$, т. е.

$$\bar{r} = 2\bar{r}_{э-б} - \bar{r}_{б-с}.$$

Перегрузка шлицов, обусловленная податливостью сопряженных муфт, может быть определена на основании тензометрирования шлицевого соединения (§ 3.3), которое показало, что $r_з$ не превосходит 0,1 $r_{э-б}$. Принимая $r_з = 0,1 r_{э-б}$ и полагая $k = 3$, из формулы найдем выражение для напряжений σ_θ в исследованной блокирующей муфте

$$\sigma_\theta = 1,15 + 11,9\cos 3\theta \ кГ/см^2. \tag{4.5}$$

Решая уравнения закона Гука относительно деформаций, получим выражения для расчетных значений ε_θ и ε_0:

$$\varepsilon_\theta = (2,88 + 5,55\cos 3\theta)\cdot 10^{-6}, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_0 = -(7,95 + 1,66\cos 3\theta)\cdot 10^{-6}. \tag{4.7}$$

Сравнение расчетных и экспериментальных эпюр относительных деформаций показывает их хорошее соответствие.

Это указывает на допустимость поэлементного рассмотрения осесимметричного и периодического изгиба муфт.

Расчетная величина касательных напряжений, вызванных осесимметричным скручиванием муфты, равна

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi\rho^2 H_0} = -8,5 \ кГ/см^2. \tag{4.8}$$

Экспериментальная эпюра напряжений τ, определенная по формуле закона Гука с учетом (4.1—4.3), имеет вид

$$\tau = -(15{,}7 + 9{,}5\cos 3\theta). \tag{4.9}$$

Сравнивая (4.8) и (4.9), видим, что действительные напряжения почти в 2 раза превосходят расчетные напряжения в предположении свободного скручивания муфты. Такое расхождение расчетных и экспериментальных величин касательных напряжений объясняется, по-видимому, тем, что тензодатчики были наклеены в достаточной близости от торца $x = l$, где еще проявляется краевой эффект. Наличие периодической составляющей свидетельствует о том, что при расчете касательных напряжений, возникающих в ободе муфты, необходимо учитывать также периодический изгиб обода и определять касательные напряжения по более общим формулам (3.6).

III. ДЕФОРМАТИВНОСТЬ САТЕЛЛИТНОГО УЗЛА

Глава 7. ДЕФОРМАЦИЯ ОСИ САТЕЛЛИТА

Сателлитный узел включает детали, с помощью которых сателлиты устанавливаются в планетарном редукторе. Обычно сателлитный узел состоит из осей сателлитов, на которые устанавливаются сателлиты и водила, щеки которого служат опорами для осей сателлитов. В некоторых случаях с целью обеспечения симметричного подвода или отвода крутящего момента предусматривается промежуточная деталь — сателлитодержатель,— в которой делают расточки под оси сателлитов и которую крепят непосредственно к водилу планетарного редуктора.

Ось сателлита работает в сложных условиях нагружения, поэтому при строгом решении задачи ее следовало бы представить в виде толстостенного цилиндра, к которому на трех участках приложены контактные нагрузки. Очевидно, что в такой постановке точное решение задачи представит значительные трудности. Поэтому для разработки инженерного метода расчета податливости оси сателлита необходимо принять приближенную расчетную модель, достаточно хорошо соответствующую действительным условиям нагружения оси сателлита.

При исследовании деформированного состояния оси сателлита удобно ввести в рассмотрение податливость оси сателлита, под которой будем понимать отношение перемещения сателлита вдоль линии действия приложенного к нему усилия $2P_0$ (P_0 — окружное усилие в зубчатом зацеплении сателлита с одним из центральных колес) w_Σ, обусловленного упругой деформацией оси сателлита, к удельной нагрузке P_0/a ($2a$ — длина участка контакта оси сателлита с сателлитом)

$$\delta'_\Sigma = w_\Sigma / P_0/a,$$

где $w_\Sigma = w_и + w_{сд} + w_{ов} + w_{1к} + w_{2к}$, w_Σ — суммарная деформация оси сателлита в направлении силы $2P_0$, $w_и$ — изгибная деформация оси сателлита, $w_{сд}$ — деформация сдвига оси сателлита, $w_{ов}$ — деформация овализации оси сателлита, $w_{1к}$ — контактная деформация оси сателлита в сопряжении с сател-

литом, $w_{2к}$ — контактная деформация оси сателлита в сопряжении с расточкой в щеке водила.

Кроме того, для учета влияния податливости оси сателлита на жесткость зубчатого зацепления зубьев сателлитов с зубьями центральных колес в рассмотрение может быть введена величина податливости зубчатого зацепления δ_Σ, равная проекции податливости оси сателлита δ_Σ на соответствующую линию зацепления

$$\delta_\Sigma = \delta'_\Sigma \cos^2 \alpha.$$

В статических условиях нагружения усилия в зацеплениях сателлита с обоими центральными колесами равны между собой (при равных углах зацепления), поэтому можно рассматривать величину податливости зацеплений сателлита с обоими центральными колесами, обусловленную жесткостью оси сателлита, которая будет равна

$$\delta_\Sigma = 2\delta'_\Sigma \cos^2 \alpha = \frac{2a}{P_0} w_\Sigma \cos^2 \alpha.$$

Ниже дается определение составляющих суммарной деформации оси сателлита, включающих как собственно ее деформацию, так и контактные деформации оси сателлита с сопряженными деталями (сателлит, поверхность расточки под ось сателлита в водиле).

§ 1. Деформация изгиба и сдвига оси сателлита

В литературе нет сведений о специальных исследованиях, посвященных изучению напряженного и деформированного состояний осей сателлитов планетарных механизмов. Имеются косвенные доказательства того, что основной составляющей упругой деформации осей сателлитов считалась их изгибная деформация, и, кроме того, ряд работ, в которых усилия, действующие на сателлиты, определялись по тензодатчикам, наклеенным в среднем сечении оси сателлита. Выбор зоны расположения тензодатчиков указывает на предположение о преобладании изгибных деформаций над остальными составляющими суммарной деформации осей сателлитов.

В работе [40] выполнено исследование напряженного и деформированного состояний поршневого пальца авиационного двигателя, условия работы которого близки к условиям работы осей сателлитов планетарного механизма. При теоретическом исследовании [40] широко используются структурные формулы с введением в них поправочных эмпирических коэффициентов. Причина такого упрощенного подхода к решению задачи заключается в чрезвычайно сложных условиях нагружения поршневых пальцев, что потребовало бы в строгой постановке решения соответствующих пространственных задач теории упругости. В неко-

торых случаях при таком методе отпадает необходимость в новых аналитических решениях соответствующих задач, поскольку поправочные коэффициенты с успехом могут быть применены и к ранее полученным, также не совпадающим с результатами экспериментов, расчетным зависимостям.

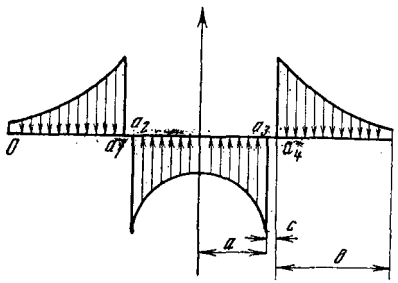
Будем рассматривать ось сателлита в виде балки, лежащей на двух упругих опорах конечной длины, загруженной в пролете через упругий штамп силой $P = 2P_0$ (рис. 35). Действие на балку опор и штампа заменим распределенными по некоторому закону нагрузками и будем искать перемещения и напряжения в балке под действием этой самоуравновешенной системы сил.

Дифференциальное уравнение изгиба призматической балки постоянного сечения имеет вид:

$$EIw^{\mathrm{IV}} = p(x). \tag{1.1}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения изгиба (1) может быть использован для определения упругой линии балки в случае, если нагрузка является непрерывной функцией координаты x на протяжении всего пролета балки. Если же нагрузка является разрывной функцией и на различных участках балки имеет различное аналитическое выражение, упругая линия балки может быть определена с помощью метода начальных параметров [16, 43].

Обычно ось сателлита планетарного редуктора имеет повышенную жесткость на изгиб, поэтому ее изгибная деформация составляет незначительную часть суммарной деформации. Это дает основание приближенно определять изгибную деформацию оси сателлита. Так, можно считать, что изгибная деформация оси сателлита (в связи с ее малостью по сравнению с контактной деформацией в местах контактирования с сопряженными деталями) не влияет на концентрацию нагрузки на участках ее приложения, и принимать равномерное ее распределение на этих участках.



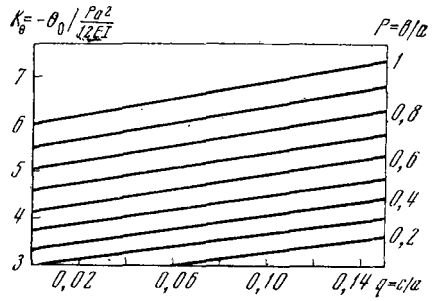


Рис. 35. Расчетная схема поршневого пальца [40]

Рис. 36. Зависимость коэффициента K_θ от параметров q и p

Угол поворота в сечении $x = a_0 = 0$ найдем из условия симметрии упругой линии оси сателлита относительно середины пролета

$$\theta_0 = -\frac{Pa^2}{12EI} k_\theta, \tag{1.2}$$

где

$$k_\theta = \left[2 + 6q + 3p + p^2\left[1 + 3\frac{q}{p}\left(1 + \frac{q}{p}\right)\right]\right], \quad p = b/a, \quad q = c/a. \tag{1.3}$$

Обычно $q \ll 1$, поэтому, опуская последнее слагаемое в (3), получим линейную зависимость коэффициента k_θ от параметра q. На рис. 36 приведена зависимость $k_\theta = f(q, p)$, построенная в предположении, что $q \ll 1$.

Стрелка прогиба в левом сечении $x = a_0 = 0$ найдется из условия равенства нулю среднеинтегральной величины прогиба оси сателлита на участке $[0, b]$

$$f_0 = \frac{Pa^3}{24EI} \cdot p(k_\theta - 0{,}1p^2). \tag{1.4}$$

Обычно в осях сателлитов планетарных механизмов $p < 1$, поэтому в формуле (4) можно опустить второе слагаемое, так как согласно (3) $k_\theta > 1$.

Определим изгибную податливость оси сателлита как среднеинтегральную величину ее изгибной деформации на участке $[a_2, a_3]$

$$\overline{w}_u = \frac{1}{2a}\int_{a_2}^{a_3} w_3(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Выполняя интегрирование в (5), получим

$$w_u = \frac{pa}{24EI} \cdot k_w, \tag{1.6}$$

где

$$k_w = \frac{1}{20p}\left[(2 + p + q)^5 - (2 + q)^5 - (p + q)^5 + q^5\right] + k_f - \\ - 1{,}6 - \frac{k_\theta}{2}\left[(2 + p + q)^2 - (p + q)^2\right], \tag{1.7}$$

$$k_f = p(k_\theta - 0{,}1 \cdot p^2).$$

Тогда изгибная податливость оси сателлита определится по формуле

$$\delta_u = \frac{\overline{w}_u}{p/2a} = \frac{a^4 k_w}{12EI}. \tag{1.8}$$

Момент инерции I для кольцевого сечения с наружным d_2 и внутренним d_1 диаметрами равен:

$$I = \frac{\pi \cdot d_2^4}{64}\left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right), \tag{1.9}$$

что при малых толщинах кольца $h \leqslant \bar{d} = \frac{d_1 + d_2}{2}$ обращается в выражение

$$I = \frac{\pi}{8}\bar{d}^3 h. \tag{1.10}$$

После подстановки в (8) значения момента инерции из (9) и (10), получим следующее выражение для изгибной податливости оси сателлита

$$\delta_u = \frac{16}{3} \cdot \frac{k_w}{\pi E (1 - \Delta^4)} \cdot \left(\frac{a}{d_2}\right)^4 \approx \frac{2}{3}\frac{k_w}{\pi E} \cdot \frac{\bar{d}}{h} \cdot \left(\frac{a}{\bar{d}}\right)^4, \tag{1.11}$$

где $\Delta = d_1/d_2$.

Обычно в планетарных механизмах конструктивные размеры осей сателлитов таковы, что их длина и диаметр являются величинами одного порядка. Это требует учета деформации сдвига оси сателлита на величину ее суммарной деформации. Однако, тот факт, что на первом (пятом) и третьем участках оси сателлита происходит контактирование ее с сопряженными деталями, исключает деформацию сдвига оси сателлита на этих участках. Поэтому деформация сдвига может иметь место только на втором (четвертом) участках оси сателлита.

Обозначим деформацию сдвига через $w_{сд}$. Тогда относительная деформация определится как

$$\bar{\gamma} = dw_{сд}/dx. \tag{1.12}$$

Связь между касательным напряжением τ и относительной деформацией сдвига γ имеет вид

$$\gamma = \tau \cdot \frac{1}{G}, \tag{1.13}$$

где G — модуль сдвига, $G = E/2\,(1 + \nu)$.

Среднее касательное напряжение

$$\bar{\tau} = P/2F, \tag{1.14}$$

где $F = \pi R_2^2 (1 + \Delta^2)$, $\Delta = R_1/R_2$.
Интегрируя (12) с учетом (13) и (14), получим

$$w_{сд} = \frac{1 + \nu}{\pi E} \cdot P \cdot \frac{c}{R_2^2 (1 + \Delta^2)}, \tag{1.15}$$

откуда податливость сдвига оси сателлита

$$\delta_{сд} = \frac{w_{сд}}{P/2a} = \frac{8(1+\nu)}{\pi E} \cdot \frac{q}{1-\Delta^2}\left(\frac{a}{d_2}\right)^2. \qquad (1.16)$$

Поскольку в планетарных механизмах $q \ll 1$, то деформацией сдвига оси сателлита можно пренебречь. Сопоставляя формулы (11) и (16), видим, что отношение деформации сдвига и изгиба равно

$$\frac{\delta_{сд}}{\delta_{и}} = \frac{3}{2}\left(\frac{d_2}{a}\right)^2 \frac{(1-\nu)\,q\,(1+\Delta^2)}{k_w} \ll 1. \qquad (1.17)$$

Несмотря на то, что деформация сдвига значительно меньше изгибной деформации, в работе [40] указывается, что напряжения среза на поршневом кольце в сечениях между бобышкой и головкой шатуна являются причиной выхода из строя поршневых пальцев. Поэтому это обстоятельство также должно учитываться при расчете на прочность осей сателлитов планетарных механизмов.

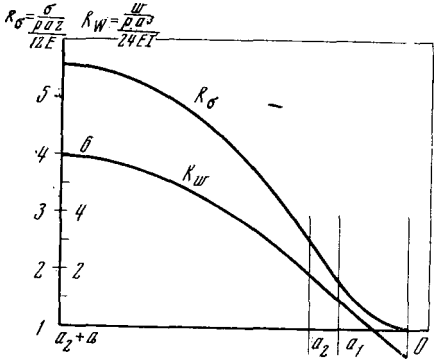


Рис. 37. Распределение напряжений и деформации изгиба по длине сателлита

При определении нормальных напряжений, возникающих в оси сателлита при изгибе, можно пренебречь влиянием касательных напряжений на изменение кривизны элемента стержня и определить их по формуле

$$\sigma_u = -\frac{M(x)}{I} \cdot z = -Ew''z. \qquad (1.18)$$

Максимальная величина изгибных напряжений имеет место в середине оси сателлита и может быть определена по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{Paz}{4I}(1+p+2q). \qquad (1.19)$$

На рис. 37 приведены эпюры коэффициентов изгибных напряжений $\sigma_u \Big/ \frac{Paz}{12I}$ и деформаций $w_u \Big/ \frac{Pa^3}{24EI}$, построенные для оси сателлита с параметрами $a = 175$ *мм*, $b = 49$ *мм*, $c = 21$ *мм*.

§ 2. Деформация овализации оси сателлита

Использование результатов расчета деформации тонкого упругого кольца для нахождения деформации овализации поршневого пальца и оси сателлита является достаточно условным, так как распределенные нагрузки, деформирующие рассматриваемые детали, действуют в разных участках по длине деталей, и поэтому задача о деформации овализации является существенно пространственной, а не плоской. В связи с этим введение в структурные формулы для деформации упругого кольца поправочных коэффициентов, учитывающих реальные условия нагружения и деформирования деталей, представляется целесообразным.

Введем в рассмотрение коэффициент жесткости k_I, учитывающий, что действительная жесткость оси сателлита на овализацию отличается от расчетной величины для тонкого упругого кольца. Тогда

$$I_{эф} = k_I I_0, \tag{2.1}$$

где $I_{эф}$ (I_0) — эффективный (номинальный) момент инерции сечения оси сателлита.

Из формулы (2.1) можно определить структурную формулу для коэффициента жесткости k_I в виде

$$k_I = I_{эф}/I_0 = (h_{эф}/h_0)^3, \tag{2.2}$$

где $h_{эф}$ (h_0) — эффективная (номинальная) толщина сечения оси сателлита.

Эффективная толщина сечения оси сателлита может быть записана в виде суммы

$$h_{эф} = h_0 + k'_г d_1, \tag{2.3}$$

где $k'_г$ — некоторый безразмерный коэффициент, характеризующий геометрические параметры оси сателлита.

Очевидно, что на повышение жесткости оси сателлита влияет соотношение между ее длиной и диаметральными размерами. Поэтому структурная формула для коэффициента может быть записана в виде

$$k'_г = k_г \cdot \frac{d_2}{l}, \tag{2.4}$$

$k_г$ — коэффициент, характеризующий геометрические параметры оси сателлита.

С учетом (3) и (4) формула (2) для коэффициента жесткости k_I примет вид

$$k_I = \left(1 + k_г \cdot \frac{d_2}{l} \cdot \frac{d_1}{h_0}\right)^3, \tag{2.5}$$

но

$$h_0 = {}^1/_2 (d_2 - d_1),$$

поэтому

$$k_I = \left(1 + 2 \cdot \frac{d_1}{l} \cdot \frac{k_г}{1 - \alpha}\right)^3. \qquad (2.6)$$

Полученный коэффициент жесткости k_I имеет вполне определенный физический смысл и характеризует повышение жесткости оси сателлита на овализацию с изменением ее конструктивных параметров. Для использования формулы (6) в расчетной практике необходимо располагать величиной коэффициента геометрии $k_г$. Определим, например, величину коэффициента $k_г$ по данным экспериментов, приведенных в работе [40]. Очевидно, что найденная для поршневых пальцев величина коэффициента $k_г$ не может быть использована при расчете деформации овализации осей сателлитов, поскольку относительные конструктивные размеры этих деталей значительно отличаются друг от друга. Однако такой расчет позволит ориентировочно оценить возможные пределы этого коэффициента в случае, когда жесткость оси сателлита на изгиб меньше жесткости ее на овализацию.

На рис. 38 приведены результаты экспериментального определения увеличения горизонтального диаметра поршневых пальцев [40]. Поскольку эти эксперименты проводились при различных нагрузках и длинах поршневых пальцев, то полученные экспериментальные данные приводились к эксперименту [40]. Из рис. 37 видно, что приведенные к эксперименту [40] точки замеров увеличения горизонтального диаметра поршневых пальцев лежат на графике достаточно кучно.

На рис. 38 приведены кривые эквивалентной величины увеличения горизонтального диаметра поршневых пальцев при $k_г = 0{,}24$ (кривая *2*) и $k_г = 0{,}3$ (кривая *3*). Как видно из рис. 38, экспериментальные точки в основном располагаются в зоне, ограниченной кривыми *2* и *3*, группируясь, однако, ближе к кри-

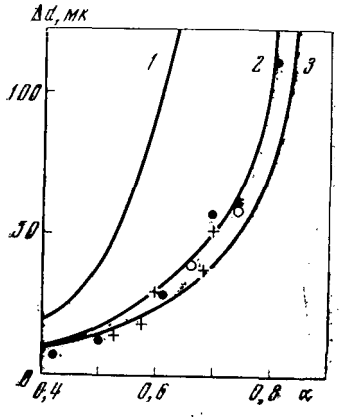


Рис. 38. Сравнение результатов замеров увеличения горизонтального диаметра поршневых пальцев в среднем сечении с расчетными данными [40]

вой 2. Можно ожидать, что наилучшее совпадение с экспериментальными точками дает кривая, для которой $0{,}24 < k_г < 0{,}3$. Учитывая характер расположения экспериментальных точек на рис. 38, можно принять, что $k_г = 0{,}25$. Тогда формула (2.6) для коэффициента жесткости поршневых пальцев k_I может быть записана в виде:

$$k_I = \left(1 + \frac{0{,}50}{1-\alpha} \cdot \frac{d_1}{l}\right)^3. \qquad (2.7)$$

Найдем выражение для расчетного определения увеличения горизонтального диаметра поршневого пальца с учетом повышения его действительной жесткости по сравнению с номинальной величиной

$$\Delta d_{экв} = \frac{\Delta d_p}{k_I} = 0{,}205 \frac{P}{El} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha+0{,}5\frac{d_1}{l}}\right)^3. \qquad (2.8)$$

Что касается использования формулы (8) для осей сателлитов, то следует иметь в виду, что в этом случае наибольший интерес представляет изменение вертикального, а не горизонтального диаметра осей сателлитов. Значительное расхождение относительных конструктивных размеров поршневых пальцев и осей сателлитов приведет, по-видимому, в последнем случае к тому, что коэффициент в формуле (8) будет отличаться от 0,5. Однако достоинством формулы (8) является независимость ее от дальнейших экспериментальных исследований по уточнению действительной жесткости подобных деталей. Таким образом, структурная формула для изменения горизонтального диаметра $\Delta d_{экв}$ может быть записана в виде:

$$\Delta d_{экв} = 0{,}205 \frac{P}{El} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha+k_\alpha \cdot \frac{d_1}{l}}\right)^3, \qquad (2.9)$$

где k_α — коэффициент, учитывающий изменение жесткости детали по сравнению с кольцом.

Полагая в формуле (9) $k_\alpha = 0$, получим очевидно формулу для номинальной величины увеличения горизонтального диаметра кольца ширины l и отношения диаметров α под действием двух вертикальных сжимающих усилий P.

Согласно [5] под действием двух сжимающих усилий в тонком упругом кольце возникают радиальные деформации, определяемые следующими зависимостями

$$w = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\theta + \sin\theta\right)\right], \qquad (2.10)$$

где, дополнительно, θ — полярный угол, отсчитываемый от сечения, где приложено сжимающее усилие.

Полагая в формуле (10) $\theta = 0$ вместо постоянной 0,205, входящей в формулу (9), получим постоянную 0,225.

Таким образом, формула для деформации овализации оси сателлита может быть записана в виде

$$w_{ов} = 0{,}225 \frac{P}{El} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha+k_\alpha \frac{d_1}{2a}} \right)^3, \tag{2.11}$$

где

$$l = \begin{cases} 2b & x = b/2 \\ 2c & x = b + c/2 \\ 2a & x = a + b + c. \end{cases}$$

При вибрационных расчетах планетарных редукторов необходимо располагать среднеинтегральной величиной, характеризующей податливость оси сателлита. В соответствии со сказанным выше можно предположить, что перемещение сателлита, обусловленное податливостью овализации оси сателлита, будет равно деформации овализации последней на участке (a_1, a_2). Поэтому определим податливость оси сателлита как изменение вертикального диаметра ее на этом участке, т. е.

$$\delta_{ов} = 0{,}225 \frac{P}{2aEq} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha+k_\alpha \cdot \frac{d_1}{2a}} \right)^3. \tag{2.12}$$

Величина k_α предварительно может быть принята равной 0,5, а ее уточнение применительно к осям сателлитов планетарных редукторов будет проведено ниже на основании специального экспериментального исследования.

§ 3. Контактная деформация оси сателлита

На участках сопряжения оси сателлита с расточками в щеках водила и с сателлитом возникают контактные напряжения и деформации, которые неравномерно распределяются по длине участка сопряжения в соответствии с распределением внешней нагрузки, приложенной к оси сателлита.

Контактные перемещения оси сателлита и сопряженных с ней деталей могут быть определены из решения И. Я. Штаермана для задачи о контакте двух упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями с малой разницей в радиусах кривизны при их внутреннем касании [84]. По-видимому, такое решение будет применимо для контакта оси сателлита с расточками в щеках водила, поскольку в месте сопряжения деталей отсутствует масляный клин. Для контакта оси сателлита с сателлитом это решение может быть использовано достаточно условно, поскольку наличие слоя смазки между сопряженными поверхностями значительно изменяет условия их контактирования.

За меру контактной деформации двух упругих тел может быть выбрана величина их сближения при сжатии w, которая определяется следующим образом:

$$w = -2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) \cos\varphi \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi|}{2} d\varphi +$$

$$+ (\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) \sin|\varphi| d\varphi - 2\nu_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) d\varphi, \qquad (3.1)$$

где

$$\nu_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\pi\mu_i(\lambda_j + \mu_i)}; \qquad \varkappa_i = \frac{1}{4(\lambda_i + \mu_i)};$$

$$\lambda_i = \frac{E_i \nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}; \qquad \mu_i = \frac{E_i}{2(1-\nu_i)},$$

где r_i — радиус кривизны i-го тела, φ — полярный угол, отсчитывается от линии действия сжимающих упругие тела, сил, в пределах площадки контакта, φ_0 — полярный угол, ограничивающий площадку контакта сопряженных упругих тел, $p(\varphi)$ — нормальное давление, распределенное по площадке контакта, E_i, ν_i — модуль упругости и коэффициент Пуассона i-го тела ($i = 1, 2$).

Угол охвата φ_0, ограничивающий площадку контакта, зависит от нагрузки, сжимающей упругие тела, поэтому контактная деформация (или сближение тел при сжатии) будет нелинейно зависеть от нагрузки. Для упрощения задачи о контактной деформации двух упругих тел зададимся законом распределения контактных давлений по площадке контакта. В точке первоначального касания тела ($\varphi = 0$) величина контактных напряжений $p(0)$ будет максимальной, а в крайних точках площадки контакта давления $p(\varphi_0)$ обращаются в нуль. Исходя из этого примем следующий приближенный закон распределения контактных давлений по площадке контакта

$$p(\varphi) = p(0) \cos\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi}{\varphi_0}. \qquad (3.2)$$

В работе [84] после точного решения контактной задачи получена зависимость между силой, сжимающей упругие тела и углом охвата φ_0, характеризующим размер площадки контакта, приведенная на рис. 39. Здесь $\varepsilon = r_1 - r_2$ — разность радиусов контактирующих цилиндра и цилиндрического выреза. Из рис. 39 видно, что при малых величинах ε зависимость между φ_0 и P близка к линейной.

Для дальнейших расчетов примем, что контактирующие тела выполнены из материалов, имеющих одинаковые упругие постоянные E и ν и, кроме того, поскольку радиусы цилиндра и цилин-

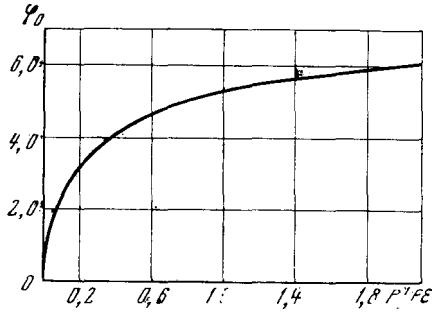


Рис. 39. Зависимость угла охвата φ_0 от нагрузки, сжимающей детали [84]

дрического выреза мало отличаются друг от друга, то $r_1 = r_2 = r$. Тогда формула (3.1) для сближения упругих тел примет вид

$$w = -2p_{(0)}\vartheta r\left[2I_1 + I_2 - \frac{\varkappa}{\vartheta} I_3\right], \tag{3.3}$$

где

$$\vartheta = (1-\nu^2)/\pi E, \qquad \varkappa = (1+\nu)(1-2\nu)/2E,$$

$$I_1 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varphi}{\varphi_0}\cos\varphi \ln \operatorname{tg}\frac{|\varphi|}{2}\, d\varphi, \tag{3.4}$$

$$I_2 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varphi}{\varphi_0}\, d\varphi, \tag{3.5}$$

$$I_3 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varphi}{\varphi_0}\sin|\varphi|\, d\varphi. \tag{3.6}$$

После подстановки в (3) значения p (0) и упругих постоянных ϑ и $\varkappa$ получим

$$w = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\cdot P\cdot\frac{1-(2\varphi_0/\pi)^2}{\frac{4}{\pi}\cdot\varphi_0\cos\varphi_0}\left[2I_1 + I_2 - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu} I_3\right]. \tag{3.7}$$

Определяя интегралы, получим следующую зависимость для сближения упругих тел:

$$w = k_w\frac{P}{E}, \tag{3.8}$$

где

$$k_w = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi\cos\varphi_0}\left\{2\left[\cos\varphi_0 \ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} - 1{,}3704\right] + \right.$$
$$\left. + 1 + \frac{5}{3}\left(\frac{2\varphi_0}{\pi}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\,\frac{(1-2\nu)}{1-\nu}\left(\sin\varphi_0 - \frac{2\varphi_0}{\pi}\right)\right\} \tag{3.9}$$

Как видно из рис. 39, угол охвата φ_0 изменяется с нагрузкой, поэтому коэффициент k_w (9) также зависит от нагрузки. С учетом (8) и (9) формула для контактной податливости при сжатии двух сопряженных деталей может быть записана в виде

$$\delta_k = w/P = k_w/E. \tag{3.10}$$

На рис. 40 приведена зависимость k_w от угла охвата φ_0 построенная по формуле (3.9). При малых нагрузках коэффициент контактной податливости k_w имеет максимальную величину $k_w = 7{,}6614$. Затем с ростом нагрузки коэффициент k_w быстро падает и в диапазоне изменения нагрузок $0{,}02 < p/E\varepsilon < 2{,}2$ практически остается постоянным $k_w \approx 4{,}5$. В реальных условиях нагружения осей сателлитов угол охвата φ_0 изменяется в пределах от 20 до 30°, что в соответствии с графиком рис. 40 дает

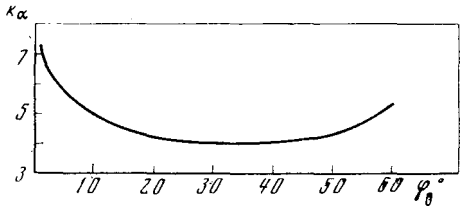


Рис. 40. Зависимость коэффициента контактной податливости от угла охвата φ_0

практически неизменную величину коэффициента контактной податливости $k_w \approx 4{,}3$. Поэтому при расчете контактной деформации осей сателлитов на участках сопряжения ее с расточками в водиле и с сателлитом можно приближенно предполагать линейную зависимость между контактной деформацией и внешней нагрузкой и принимать величину коэффициента контактной податливости равной $k_w \approx 4{,}30$. Тогда в соответствии с формулой (10) контактная податливость оси сателлита для стальных деталей также может быть принята не зависящей от нагрузки и равной

$$\delta_k \approx \frac{k_w}{E} \approx 2 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ. \tag{3.11}$$

Суммарная контактная деформация на участках сопряжения сателлитов с расточками в водиле и сателлитом может быть определена по формуле

$$w_k = \frac{P}{E}\left[\frac{k_{w_2}}{2b} + \frac{k_a + k_{w_1}}{2a}\right] \tag{3.12}$$

или

$$w_k = 10^{-6}\frac{P}{a}\left[\frac{1}{P} + k_a\right], \tag{3.13}$$

где, дополнительно, k_a — коэффициент, учитывающий расхождение условий контактирования оси сателлита с сателлитом и приня-

той при выводе зависимости (9) вследствие наличия между поверхностями контакта слоя смазки.

Суммарная контактная податливость оси сателлита может быть тогда найдена из зависимости

$$\delta_k = \frac{w_k}{P/2a} = 2 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{P} + k_a \right] \text{ см}^2/\text{кГ}. \qquad (3.14)$$

Определение величины коэффициента k_a требует решения задачи о податливости подшипника скольжения (масляного слоя между поверхностями контакта) и выходит за рамки настоящей работы.

§ 4. Экспериментальные исследования деформации оси сателлита

Выполненное выше теоретическое исследование напряженного и деформированного состояний осей сателлитов показало, что точное решение поставленной задачи представляет значительные трудности, в связи с чем целью экспериментального исследования оси сателлита была проверка расчетных зависимостей и введение необходимых поправочных коэффициентов, учитывающих принятые при теоретическом исследовании допущения.

Кроме того, при исследовании распределения нагрузки между сателлитами в планетарных механизмах часто используются тензодатчики, наклеиваемые на оси сателлитов. Таким путем удается непосредственно определить нагрузку, действующую на сателлиты, и тем самым перейти к нахождению коэффициента неравномерности нагружения сателлитов по достаточно простым зависимостям. При подобных исследованиях стоит вопрос об определении места наклейки тензодатчиков на оси сателлитов, в котором будут получены максимальные сигналы с тензодатчиков. Это вызывает необходимость исследовать напряженное состояние оси сателлитов с целью нахождения зоны с максимальными напряжениями.

Экспериментальные исследования [18, 45] показали, что условия нагружения оси сателлита планетарного редуктора существенно зависят от зазоров в опорах, при этом была получена качественная картина распределения осевых напряжений на оси сателлита. Ограниченные размеры исследуемых осей сателлитов не позволили определить другие составляющие напряженного состояния оси сателлита. В связи с этим, в настоящем исследовании, кроме определения податливости оси сателлита были также найдены составляющие напряжений на внутренней поверхности оси сателлита.

На рис. 41 и 42 приведены коэффициенты пропорциональности между измеренными относительными деформациями и нагрузкой,

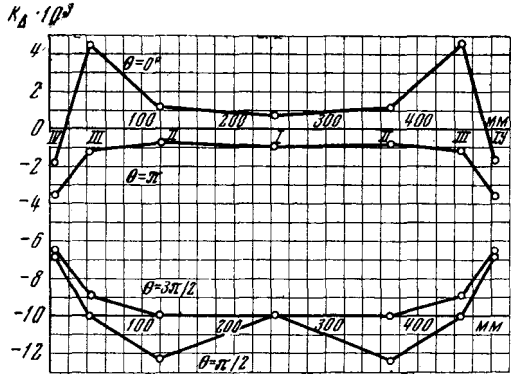


Рис. 41. Эпюры коэффициента осевых деформаций на модели оси сателлита

прикладываемой к модели оси сателлита при ее тензометрировании ($k_\Delta = \Delta/p$ [$1/\kappa_г$]). Для определения напряжений, зарегистрированных тензодатчиком, необходимо величину коэффициента деформаций k_Δ умножить на постоянную $PE \cdot 10^{-6}$ (P [кГ], E [кГ/см^2]).

Эпюры коэффициентов осевых напряжений позволяют ответить на вопрос о наиболее напряженном участке оси сателлита. В некоторых экспериментальных исследованиях для определения распределения нагрузки между сателлитами тензодатчики устанавливались в осевом направлении среднего сечения осей сателлитов в предположении, что здесь возникают максимальные изгибные напряжения. Как видно из рис. 43, именно в этом сечении оси сателлита возникают минимальные осевые напряжения, поэтому для повышения точности экспериментального определения нагрузки на сателлитах осевые тензодатчики следует устанавливать со стороны действия нагрузки ($\theta = 0°$) в сечении между сателлитом и щекой водила.

Из рис. 44 видно, что коэффициент окружных напряжений во всех сечениях по длине модели оси сателлита больше при $\theta = 0°$, чем при $\theta = 180°$. Если бы ось сателлита деформировала подобно кольцу, то, очевидно, в этих сечениях окружные напряжения были равны друг другу. Характер деформирования окружных тензодатчиков также может быть объяснен, если предположить, что условия деформирования оси сателлита ближе к условиям деформирования упругой оболочки под действием локальных нагрузок, распределенных по ее образующим.

Обращает на себя внимание то, что во всех сечениях по длине модели оси сателлита окружные напряжения при $\theta = 90°$ и $270°$ по абсолютной величине больше, чем при $\theta = 0°$ и $180°$. Этот результат противоречит теоретическому закону распределения окружных напряжений в предположении, что ось сателлита претерпевает деформацию овализации подобно тонкому упругому кольцу. Действительно, согласно [5] под действием двух сжимаю-

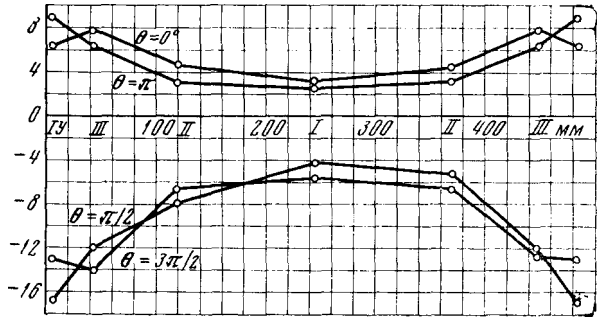


Рис. 42. Эпюры коэффициентов окружных деформаций на модели оси сателлита

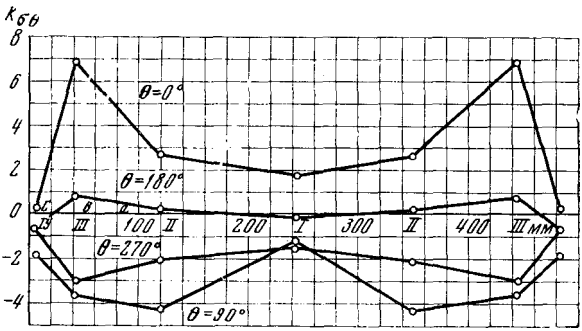


Рис. 43. Изменение коэффициента осевых напряжений $K\sigma_\theta$ по длине модели оси сателлита

щих усилий P в тонком упругом кольце возникают окружные напряжения

$$\sigma_\theta = \frac{PR}{2I}\left[-z\left(\frac{2}{\pi} - \sin\theta\right) + \frac{I}{F\cdot R}\cos\theta\right]. \qquad (4.1)$$

Пренебрегая последним слагаемым в этой формуле, учитывающим влияние на изгиб нормальных сил, получим приближенно отношение окружных напряжений при $\theta = 0°$ и $90°$

$$\frac{\sigma_\theta(0°)}{\sigma_\theta(90°)} \approx \frac{2}{\pi} \Big/ \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = -1{,}76,$$

в то время как из эпюр рис. 43 средняя величина отношения окружных напряжений при этих углах равна

$$\frac{\sigma_\theta(0°)}{\sigma_\theta(90°)} \approx -0{,}56.$$

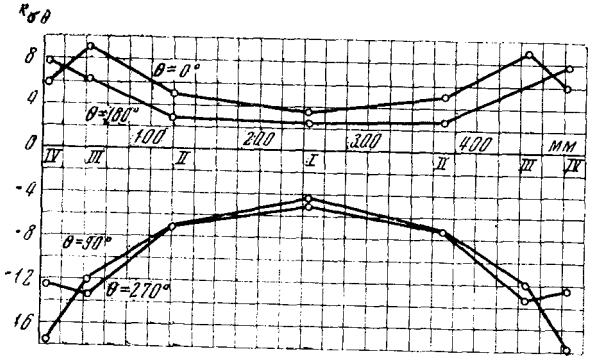


Рис. 44. Изменение коэффициента окружных напряжений $K\sigma_\theta$ по длине модели оси сателлита

По-видимому, напряженное и деформированное состояния осей сателлитов и им подобных деталей в значительной степени зависит от их конструктивного исполнения. Так, расчет по формуле (1) с учетом коэффициента жесткости (2.7), выполненный для испытанных в работе [40] поршневых пальцев, дал следующие значения окружных напряжений — $\sigma_\theta(0°) = -2\cdot480$ *кГ/см²* $\sigma_\theta(90°) = 1430$ *кГ/см²*, что хорошо соответствует экспериментально полученным величинам $-\sigma_\theta(0°) = -2.380$ *кГ/см²*, $\sigma_\theta(90°) = 1520$ *кГ/см²*. Поэтому изложенная выше методика поэлементного рассмотрения напряженного состояния оси сателлита планетарного механизма достаточно условна и требует дальнейшего уточнения.

Вместе с тем проведенное исследование позволило обнаружить зону с максимальными окружными напряжениями. Установлено, что окружные напряжения по абсолютной величине превосходят (в соответствующих сечениях) осевые напряжения, поэтому для повышения точности определения усилий на сателлитах планетарных механизмов по результатам тензометрирования осей сателлитов тензодатчики следует устанавливать в окружном направлении в угловых сечениях с координатами $\theta = 90°$ или $270°$ на участке оси сателлита между сателлитом и щекой водила.

Переходим к анализу результатов измерения податливости оси сателлита и ее составляющих. Как следует из сказанного выше, в эксперименте определялись деформации овализации оси сателлита и суммарная деформация сателлитного узла. Результаты измерения деформации овализации модели оси сателлита сведены в табл. 27.

В интервале нагрузок от 3 до 14 *т* деформация овализации оси сателлита линейно зависит от нагрузки. Некоторая нелинейность функции $w_{ов} = f(P)$ при малых нагрузках объясняется, по-видимому, изменением схемы деформирования (в связи с концентрацией нагрузки) и наличием зазоров в системе нагружения.

Таблица 27. **Деформация овализации модели оси сателлита, *мк***

Сечение	θ°	Нагрузка, *кГ*					$\delta_{ов.л} \times 10^9$ *см/кГ*
		3 000	6 000	9000	10000	14000	
I	0	—5	—8	—10	—11	—13	—8
	90	1	2	3	3	6	4
III	0	—9	—14	—20	—22	—29	—18,1
	90	0	2,5	6	7	10	9,3
IV	0	—8	—14,5	—20,5	—23	—31	—21
	90	4	7,5	11	12	15,5	11,3

Приведенные в табл. 27 величины коэффициентов линейной податливости овализации модели оси сателлита для $3m \leqslant P \leqslant 14\ m$ показывают, что характер изменения деформации овализации по длине модели оси сателлита противоположен приведенному в [40] характеру изменения внутреннего диаметра поршневого пальца. Максимальная величина деформации овализации оси сателлита соответствует торцевым сечениям, в то время как в поршневом пальце максимальное изменение диаметра происходит в среднем сечении. Следовательно, от жесткости оси сателлита и ей подобных деталей зависит не только величина деформации овализации, но и характер ее изменения по длине детали.

В соответствии с (2.9) и (2.12) деформация овализации модели оси сателлита определится по формуле

$$w_{ов} = \frac{P \cdot k_\theta}{E \cdot l} \left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha+k_\alpha \cdot \frac{d_1}{2a}} \right]^3, \tag{4.2}$$

k_θ — коэффициент, зависящий от угловой координаты точки, в которой измеряется деформация овализации,

$$k_\theta = 0{,}205 \text{ при } \theta = 90°, \qquad k_\theta = 0{,}225 \text{ при } \theta = 0°,$$

l — длина соответствующего участка модели оси сателлита, на котором измеряется деформация овализации.

Из формулы (2) следует, что

$$\frac{w_{ов}(0)}{w_{ов}(90°)} = \frac{k_0}{k_{90}} = -1{,}10,$$

в то время как из табл. 27 средняя величина отношения деформаций овализации равна —1,94. Следовательно, деформация овализации оси сателлита по своему характеру отличается от деформации овализации тонкого упругого кольца.

Определим по результатам измерения деформации овализации модели оси сателлита величину коэффициента k_α (2), учитывающего изменение жесткости оси сателлита по сравнению с тонким упругим кольцом. Полагая в формуле (4.2) $k_\alpha = 0$, найдем номинальную величину деформации овализации соответствующего участка модели оси сателлита. Для испытанной модели оси сателлита $\alpha = 115/190 = 0{,}605$, $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2} и

$$\delta_{\text{ов. л}} = \frac{w_{\text{ов}}}{P} = 7{,}02 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{l} \text{ см/кГ}. \qquad (4.3)$$

На участке сопряжения модели оси сателлита с сателлитом $l = 35$ *см* и $\delta_{\text{ов. л}} = 2{,}05 \cdot 10^{-7}$ *см/кГ*, а на участке сопряжения ее с опорами $l = 2.4{,}9 = 9{,}8$ *см* и $\delta_{\text{ов.л.}} = 7{,}17 \cdot 10^{-7}$ *см/кГ*. В соответствии с данными табл. 27 коэффициент жесткости k_I для этих участков модели оси сателлита равен 2,56 и 3,42, соответственно, а коэффициент геометрии $k_\alpha = 0{,}46$ и 0,61. Полученные значения коэффициентов геометрии могут быть использованы для расчета деформации овализации соответствующих участков оси сателлита.

В соответствии с (2.12) за меру деформации овализации оси сателлита планетарного редуктора может быть принята деформация ее на участке $[a_1, a_2]$, которая равна (4.3) $\delta_{\text{ов.л.}} [a_1, a_2] = 1{,}67 \cdot 10^{-6}$ *см/кГ*. Учитывая то, что с уменьшением соответствующего участка величина коэффициента геометрии k_α увеличивается, примем для участка $[a_1, a_2]$ $k_\alpha = 0{,}65$, что даст $k_I = 3{,}65$ и $\delta_{\text{ов.л.}} = 0{,}46 \cdot 10^{-6}$ *см/кГ*.

Изгибная податливость модели оси сателлита экспериментальным путем не определялась, поэтому о возможности применения в расчетной практике полученных выше формул (1.11) и (1.16) можно судить, сопоставив результаты экспериментального определения изгибной деформации поршневых пальцев [40] с расчетом по этим формулам. Замерялись прогибы двух поршневых пальцев длиной 140 *мм*, внешним диаметром 38 *мм*, внутренним диаметром 28 и 25 *мм*. Расстояние между бобышками равнялось 50 *мм*, ширина головки шатуна — 48 *мм*. При нагрузке $P = 9000$ *кГ* были измерены изгибные деформации $w_{\text{и}} = 0{,}120$ и 0,097 *см*, соответственно.

Расчет по формулам § 1 дал следующие результаты: $w_{\text{и}} = 93$ и 81 *мк*. Если учесть, что при измерении деформации поршневого пальца не удалось выявить в чистом виде изгибную деформацию и поэтому измерялась часть деформации овализации поршневого пальца, то полученное совпадение расчетных и измеренных величин деформаций можно признать удовлетворительным.

Воспользовавшись формулой (1.11) для определения изгибной податливости модели оси сателлита, найдем

$$\delta_{\text{и}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_W}{\pi E} \cdot \frac{\bar{d}}{h} \left(\frac{a}{d}\right)^4 = 2{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ см/кГ}$$

и линейная податливость модели оси сателлита будет равна

$$\delta_{и.\,л} = 0{,}813 \cdot 10^{-7}\ см^2/кГ,$$

Удельную податливость модели оси сателлита на сдвиг найдем из формулы (1.16)

$$\frac{\delta_{сд}}{\delta_{и}} = \frac{3}{2}\left(\frac{d_2}{a}\right)^2 \frac{(1+\nu)\,q\,(1+\Delta^2)}{K_w} = 0{,}0585$$

и

$$\delta_{сд} = 0{,}0585 \cdot \delta_{и} = 0{,}166 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ,$$

$$\delta_{сд.\,л} = 0{,}0585 \cdot \delta_{и.\,л} = 0{,}0476 \cdot 10^{-7}\ см^2/кГ.$$

Удельную контактную податливость оси сателлита определим из формулы (3.14)

$$\delta_{к} = 2 \cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{p} + k_a\right) = 91{,}4 \cdot 10^{-7}\ см^2/кГ$$

откуда

$$\delta_{к.\,л} = 2{,}62 \cdot 10^{-7}\ см/кГ.$$

Таким образом, суммарная удельная податливость сателлитного узла составляет

$$\delta'_{\Sigma} \approx 30 \cdot 10^{-6}\ см^2/кГ,$$

что даже превосходит податливость зубьев зубчатых колес.

При эксперименте индикатор регистрировал суммарную деформацию узла, включая контактную деформацию в месте стыка стоек со столом пресса, поэтому измеренные деформации превосходят расчетные значения, определенные выше. Проведенное исследование показывает необходимость учета податливости осей сателлитов при расчете динамических схем планетарных редукторов.

Глава 8. ДЕФОРМАЦИЯ ВОДИЛА

Водило наиболее ответственная деталь планетарного механизма, конструктивное исполнение и точность изготовления которой оказывают существенное влияние на эксплуатационные характеристики. С одной стороны, конструкция корпуса водила, его деформативность определяют возможную неравномерность распределения нагрузки по длине зубчатого венца. Это может привести к снижению прочности зубчатого зацепления. С другой стороны, деформативность корпуса водила может быть использована для компенсации упругих деформаций других элементов планетарного механизма (например, деформации кручения обода солнечной шестерни) с целью выравнивания нагрузки по длине зубчатого венца. В связи с этим возрастает необходимость определять с высокой точностью деформативность водила планетарного механизма.

§ 1. Методы определения деформации водила

В работе [48] предложено учитывать деформацию перемычки водила как балки, один конец которой защемлен в одной щеке, а второй смещается без поворота во второй щеке водила. На основании этого получена следующая расчетная формула, позволяющая определять деформацию изгиба перемычки и связанное с ней относительно смещение щек водила в следующем виде

$$w_{\text{п}} = {}^{1}/_{12} \cdot \frac{P l_{\text{п}}^{3}}{E I_{\text{п}}}, \tag{1.1}$$

где P — усилие, приходящееся на одну перемычку, l_n — длина перемычки, I_n — момент инерции поперечного сечения перемычки, w_n — относительное смещение щек водила в связи с изгибной деформацией перемычки, измеренное на дуге радиуса перемычки R_n.

Очевидно, что формула (1.1) может быть использована для определения деформации водила, в котором его щеки являются достаточно жесткими, и их деформацией поэтому можно пренебречь.

В работе [29] корпус водила рассматривается как тонкостенная пространственная конструкция, состоящая из двух колец (щек), соединенных между собой равноотстоящими балками (перемычками) (рис. 45). На основании такого представления корпуса

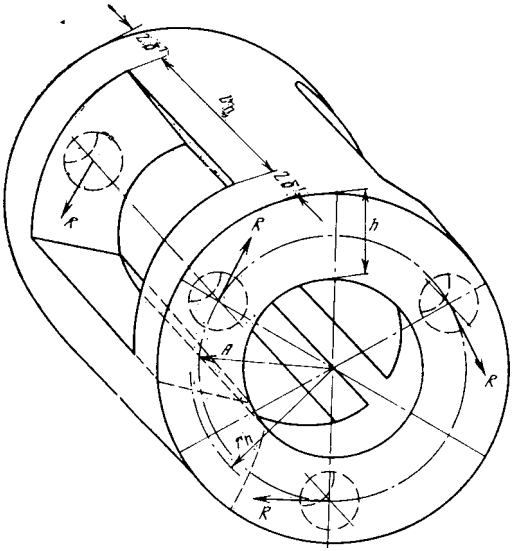


Рис. 45. Расчетная схема водила [29]

водила получена следующая зависимость для определения его деформативности:

$$w_n = {}^1/_{12} \cdot \frac{PL_п^3}{EI_n} \cdot k_щ, \tag{1.2}$$

где, дополнительно, $k_щ$ — коэффициент, учитывающий совместную деформацию перемычек и щек и конструктивное исполнение корпуса водила.

Если щеки водила имеют одинаковые размеры, то коэффициент $k_щ$ может быть определен по формуле

$$k_щ = 1 + \frac{\beta_щ}{2} \cdot \frac{L_щ}{L_п} \cdot \frac{I_п}{I_щ}, \tag{1.3}$$

где $L_щ$ — длина щеки водила

$$L_щ = \frac{2\pi}{z_c} \cdot R_п, \tag{1.4}$$

z_c — число сателлитов в планетарном механизме; $R_п$ — радиус, проходящий через средние линии перемычек; $L_п$ — длина перемычки

$$L_п = l_n + \delta_1 + \delta_2 = l_n + 2\delta, \tag{1.5}$$

$l_п$ — расстояние между щеками водила: δ_1 (δ_2) — толщина первой (второй) щеки водила, в рассматриваемом случае $\delta_1 = \delta_2 = \delta$; $I_п$ — момент инерции поперечного сечения перемычки, $I_щ$ —

момент инерции поперечного сечения щеки водила с размерами δ и h; $\beta_щ$ — коэффициент жесткости щеки водила, определенный из рассмотрения ее в виде тонкостенного кольца

$$\beta_щ = {}^3/_2 \cdot \frac{z_c}{\pi}\left(k_1 + k_2 \cdot \frac{EI_щ}{GI_{рщ}}\right); \qquad (1.6)$$

$I_{рщ}$ — полярный момент инерции щеки прямоугольного поперечного сечения с размерами δ и h; k_1, k_2 — коэффициенты, зависящие от числа сателлитов в планетарном механизме (табл. 28).

Таблица 28. **Значения коэффициентов k_1 и k_2 (1.6)**

z_c	k_1	k_2	z_c	k_1	k_2
3	0,2047	0,0159	6	0,0906	0,0017
4	0,1427	0,0061	7	0,0768	0,0009
5	0,1105	0,0030	8	0,0672	0,0007

Из формул (1.2) — (1.6) следует, что если деформацией щек водила можно пренебречь ($I_щ \to \infty$), то формула (1.2) обратится в формулу (1.1) (с заменой $L_п$ на $l_п$). Следовательно, формула (1.1) является частным случаем формулы (1.2) при пренебрежении деформацией щек водила.

Если перемычки у водила отсутствуют и щеки выполнены за одно целое с осями сателлитов, то формула для коэффициента $k_щ$ примет вид

$$k_щ = 4\left(1 + \frac{\beta_щ}{4} \cdot \frac{L_щ}{L_п} \cdot \frac{I_п}{I_щ}\right), \qquad (1.7)$$

где $L_п = \frac{l_n}{2} + \delta$ (это значение длины перемычки следует также подставлять в формулу (1.2)].

В данном случае радиус перемычек $R_п$ равен межцентровому расстоянию планетарного механизма A.

Если одна щека водила жестко защемлена, то формула для коэффициента $k_щ$ примет вид

$$k_щ = 4\left[1 - \frac{0{,}75}{\left(1 + \frac{\beta_щ}{12} \cdot \frac{L_щ}{L_n} \cdot \frac{I_п}{I_щ}\right)}\right], \qquad (1.8)$$

где $L_п = l_п + \delta$.

Наконец, если нагрузка к водилу подводится симметрично и может быть приложена в середине перемычки, то формула для коэффициента $k_щ$ также имеет вид (1.8), однако в ней (так же

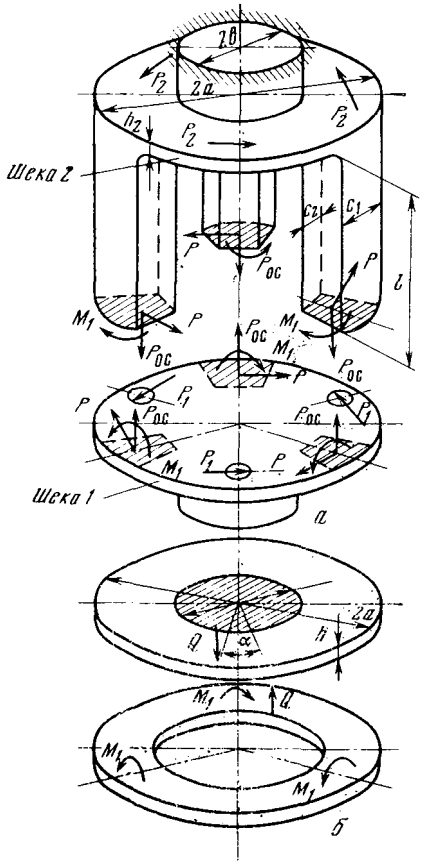


Рис. 46. Расчетная схема водила [33]

как и в формуле (1.2) для этого случая) следует положить длину перемычки равной

$$L_п = \frac{l_п}{2} + \delta.$$

Во всех рассмотренных случаях под P в формуле (2) понимается окружная составляющая реакции на оси сателлита P_0, приведенная к радиусу перемычки

$$P = P_0 A / R_п.$$

Угол относительного поворота щек водила, измеренный по окружности расположения осей сателлитов, может быть определен с учетом приведенных выше зависимостей по формуле

$$\gamma = w_п / L_п. \qquad (1.9)$$

Приведенные зависимости могут быть использованы для определения деформации водила, элементы которого выполнены в виде тонких колец (щеки) и балок (перемычки). В реальных конструкциях планетарных механизмов эти условия не соблюдаются, поэтому приведенные зависимости дают завышенные значения деформации водила.

В работах [27, 33] корпус водила рассматривается как мембранно-стержневая конструкция, в которой щеки представляются в виде тонких, круглых пластинок, а перемычки в виде балок (рис. 46). При этом учитываются деформации кручения и изгиба щек водила, а также деформации изгиба и сдвига его перемычек. В результате получена следующая зависимость для угла относительного поворота щек водила

$$\gamma = \varphi_1 \left(\frac{r_{c1} - b_1}{a - b_1} \right)^3 M, \qquad (1.10)$$

где

$$M = P\frac{\frac{1}{EI_{\text{п}}}\left(\frac{l_n^2}{2}+\frac{c^2}{3}\right)+\varphi_2 l_{\text{п}}\left(\frac{r_{c2}-b_2}{a-b_2}\right)^3}{\frac{l_{\text{п}}}{EI_{\text{п}}}+\varphi_1\left(\frac{r_{c_1}-b_1}{a-b_1}\right)+\varphi_2\left(\frac{r_{c_2}-b_2}{a-b_2}\right)^3},$$

φ_1, φ_2 — вспомогательный угол поворота сечения, $\varphi_i = 2n_i a_i^2/\pi D_i c_i^2$; a (b) — наружный (внутренний) радиус щеки водила; n_1, n_2 — некоторые вспомогательные коэффициенты, зависящие

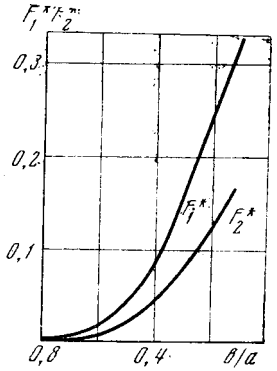


Рис. 47. Зависимость коэффициентов F_1 и F_2 от соотношения b_i/a_i

от отношений b/a для первой и второй щеки водила,

$$n_i = F_1\left(1-\cos\frac{\pi}{z_c}\right)+F_2\left(1-\cos\frac{2\pi}{z_c}\right) \quad \text{(рис. 47)}$$

c — эквивалентная ширина перемычки водила; r — эквивалентный радиус расположения перемычки, D — цилиндрическая жесткость пластинок, заменяющих щеки водила, $D = Eh^3/12\,(1-\nu^2)$; $l_{\text{п}}$ ($I_{\text{п}}$) — длина (момент инерции поперечного сечения) перемычки водила.

В приведенных формулах индекс «1» относится к первой, индекс «2» — ко второй щеке водила.

Если щеки водила имеют одинаковые размеры ($b_1 = b_2$, $r_1 = r_{c2}$, $D_1 = D_2$), то формула для угла относительного поворота щек водила примет вид

$$\gamma = \varphi\left(\frac{r_c-b}{a-b}\right)^3 M, \tag{1.11}$$

где

$$M = \frac{\frac{1}{EI_{\text{п}}}\left(\frac{l_{\text{п}}^2}{2}+\frac{c^2}{3}\right)+\varphi\left(\frac{r_c-b}{a-b}\right)^3}{\frac{l_{\text{п}}}{EI_{\text{п}}}+2\varphi\left(\frac{r_c-b}{a-b}\right)^3}. \tag{1.12}$$

Если одна щека водила жестко защемлена и, кроме того, отношение радиуса срединной окружности щек к ее толщине больше пяти, то для определения деформации щеки водила используются формулы для тонкого упругого кольца и формула для относительного поворота щек водила примет вид

$$\gamma = \frac{k_1 R_{\text{ср.}}}{EI_{\text{щ}}} M, \tag{1.13}$$

где k_1 — коэффициент, зависящий от числа сателлитов в планетарном механизме (табл. 28)

$$M = \frac{\frac{1}{EI_{\text{п}}}\left(\frac{l_{\text{п}}^2}{2} + \frac{c^2}{3}\right) + \varphi l_{\text{п}} \left(\frac{r_{\text{с}} - b}{a - b}\right)^3}{\frac{l_{\text{п}}}{EI_{\text{п}}} + \varphi\left(\frac{r_{\text{с}} - b}{a - b}\right)^3 + \frac{k_1 R_{\text{ср.}}}{EI_{\text{щ}}}}. \tag{1.14}$$

Если отношение радиуса срединной окружности щеки к ее толщине меньше пяти, то щеку следует рассматривать как кольцевую пластинку, и формула для относительного поворота щек водила примет вид

$$\gamma = M/20{,}44\text{D}\, l_{\text{п}} \frac{b}{a}, \tag{1.15}$$

где

$$M = \frac{\frac{1}{EI_{\text{п}}}\left(\frac{l_{\text{п}}^2}{2} + \frac{c^2}{3}\right) + \varphi l_{\text{п}} \left(\frac{r_{\text{с}} - b}{a - b}\right)^3}{\frac{l_{\text{п}}}{EI_{\text{п}}} + \varphi\left(\frac{r_{\text{с}} - b}{a - b}\right)^3 + \frac{1}{20{,}44\text{D}\, l_{\text{п}} \frac{b}{a}}}. \tag{1.16}$$

Приведенные зависимости достаточно полно характеризуют упругую деформацию водила, однако они могут быть использованы для определения деформации достаточно податливого водила.

Таким образом, опубликованные работы, в которых исследовалась деформация водила, могут быть использованы для определенных конструкций водила.

В связи с указанным, возникает необходимость разработки упрощенного метода определения деформации водила, который позволил бы учитывать его основные составляющие.

§ 2. Деформация щек водила

В современных планетарных механизмах геометрические параметры щек водила таковы, что неплоской деформацией последних при определении податливости водила можно пренебречь. Геометрические же параметры перемычек таковы, что определяющей составляющей деформации будет сдвиговая деформация.

Суммарная деформация сдвига перемычек складывается из двух составляющих, первая из которых определяется чистым сдвигом сечений в связи с действием перерезывающих усилий, а вторая — относительным поворотом сечений в связи с тем, что центр тяжести сечения перемычки движется при деформации по окружности радиуса R_n а не по касательной к ней.

Вследствие малости угла φ_n сдвиговую деформацию перемычки водила можно определить в виде

$$\gamma = \varphi_{\text{п}} \cdot \frac{R_{\text{п}}}{l_{\text{п}}}.$$

Касательное напряжение, возникающее в перемычке, равно

$$\tau = \gamma G = G\varphi_{\text{п}} \frac{R_{\text{п}}}{l_{\text{п}}},$$

а работа деформации сдвига

$$W_1 = l_{\text{п}} F \int_0^{\gamma} \tau \, d\gamma = \frac{GF}{2l_{\text{п}}} (R_{\text{п}} \cdot \varphi_{\text{п}})^2,$$

где F — площадь поперечного сечения перемычки.

Аналогично найдется работа деформации кручения сечения перемычки на угол φ_n [67]

$$W_2 = \frac{Gb_n h_{\text{п}}}{l_{\text{п}}} k\varphi_{\text{п}}^2,$$

где b_n, h_n — ширина и высота прямоугольного сечения, эквивалентного сечению перемычки, k — коэффициент формы сечения.

Полная потенциальная энергия деформации $M \cdot \varphi_n$ складывается из суммы W_1 и W_2, т. е.

$$M\varphi_{\text{п}} = z_{\text{с}} (W_1 + W_2),$$

где M — крутящий момент, передаваемый всеми перемычками водила, $z_{\text{с}}$ — число сателлитов (перемычек) в планетарном механизме.

Подставив в (2.5) значения W_1 и W_2 из (2.3) и (2.4), получим

$$M = \frac{GF}{2} z_c \frac{R_п^2}{l_п} \left[1 + 2k\left(\frac{h_п}{R_п}\right)^2\right] \varphi_п. \qquad (2.6)$$

Величина $(h_п/R_п)$ характеризует долю крутильной деформации в суммарной сдвиговой деформации перемычек водила. В зависимости от конструктивного исполнения водила соотношение между составляющими сдвиговой деформации перемычек водила изменяется.

Заменяя поперечное сечение перемычки прямоугольником со сторонами $b_п$ и $h_п$, убеждаемся, что для распространенных конструкций планетарных механизмов $b_п \approx h_п$ и коэффициент k, входящий в формулы (2.4—2.6), равен $k \approx 0{,}2$ [16]. Максимальное значение отношения $h_п/R_п$ не превосходит 0,5. Поэтому второе слагаемое в (2.6), стоящее в квадратных скобках, не превосходит 0,1. Следовательно, обычно крутильная деформация перемычек водила не превосходит 10% от их сдвиговой деформации. Это дает основание в практических расчетах ею пренебрегать.

Таким образом, податливость перемычек щек водила равна

$$\delta_n = \frac{\varphi_n}{M} = \frac{l_n}{k_n G F z_c R_n^2}, \qquad (2.7)$$

где

$$k_п = 1 + 2k\left(\frac{h_п}{R_п}\right)^2. \qquad (2.8)$$

Будем также считать, что деформация щеки водила носит чисто сдвиговой характер, т. е. перемещения в радиальном направлении равны нулю. Рассмотрим щеку водила в виде диска с внутренним R_1 и наружным R_2 радиусами, закрепленным от поворота по радиусу R_1 и нагруженного равномерно распределенной касательной нагрузкой по окружности радиуса $R_п (R_п \approx \approx 0{,}5\,(R_1 + R_2)$.

Уравнения равновесия получатся из рассмотрения элементарного кольца с внутренним r и наружным $r + dr$ радиусом, на внутренней стороне которого действуют касательные напряжения τ, а на наружной — $\tau + d\tau$. Условие равновесия выделенного элементарного кольца имеет вид

$$M(r) = M(r + dr) \qquad (2.9)$$

или

$$2\pi\tau r^2 = 2\pi(\tau + d\tau)(r + dr)^2. \qquad (2.10)$$

Пренебрегая в (2.10) величинами второго порядка малости по сравнению с единицей, получим уравнение равновесия в виде:

$$\frac{d\tau}{dr} + 2\frac{\tau}{r} = 0,$$

которое решается в виде

$$\tau = k/r^2. \tag{2.11}$$

Из условия равновесия найдем значение постоянной k, входящей в (2.11) $\tau_1 R_1^2 = \tau_2 R_2^2 = = M/2\pi$.

$$\tau = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}. \tag{2.12}$$

Если составляющие перемещения точки в радиальном и тангенциальном направлениях обозначить через u и v, то деформацию сдвига можно представить следующим образом

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

Так как было принято, что $u = 0$, а $v = v_{(r)}$, то

$$\gamma_{r\theta} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}. \tag{2.13}$$

Закон Гука имеет вид $\gamma_{r\theta} = \tau/G$.

Подставив сюда $\gamma_{r\theta}$ и τ из (2.13) и (2.12), получим

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{M}{2\pi G} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Решая это уравнение с учетом граничных условий $v(R_1) = = 0$, получим

$$v_{(r)} = \frac{\frac{M}{2\pi G}\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{2r} = \frac{M}{4\pi r G}\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 - 1\right].$$

Относительный угол сдвига щеки на окружности радиуса $R_п$ будет равен

$$\varphi_щ = \frac{v(R_n)}{R_n} = \frac{M}{4\pi G h}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_n^2}\right), \tag{2.14}$$

где h — толщина щеки водила.

Таким образом, податливость щеки водила равна

$$\delta_щ = \frac{\varphi_щ}{M} = \frac{1}{4\pi G h}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_n^2}\right). \tag{2.15}$$

Аналогичная формула может быть получена для определения крутильной податливости другой щеки водила. Одинаковая крутильная податливость обеих щек водила не влияет на перекос осей сателлитов и связанную с ним концентрацию нагрузки по

длине зубчатых венцов в планетарном механизме; она только повышает общую податливость корпуса водила и поэтому благоприятно сказывается на выравнивание нагрузки по параллельным потокам мощности.

Формула (2.7) получена в предположении, что щеки водила не претерпевают неплоской деформации под действием усилий от сателлитов. Как указано выше, для существующих конструкций тяжелонагруженных планетарных механизмов это положение оказывается справедливым. Однако на деформированное состояние перемычек водила существенное влияние может оказывать податливость прилежащей к перемычке части щеки водила. Эта деформация, которая по аналогии с зубчатым зацеплением может быть названа деформацией основания перемычки водила, повышая суммарную податливость перемычек водила, приводит к концентрации нагрузки в зубчатых зацеплениях.

Для оценки упругого характера заделки перемычки в щеку водила воспользуемся решениями, полученными при исследовании деформации прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса (см. § 1.2).

Рассматриваем прилежащую к перемычке часть щеки водила в виде упругой полуплоскости, на участке которой $b_п$, равном средней ширине перемычки (по радиусу $R_п$), действуют распределенные некоторым образом нормальная $p(x)$ и касательная $q(x)$ нагрузки. Таким образом, перемычка отбрасывается, а ее действие заменяется системой распределенных нагрузок.

Действие отброшенной перемычки заменяем касательными силами, распределенными равномерно по сечению перемычки $q(x) = q$, эквивалентными перерезывающей силе P, и изменяющимися по сечению перемычки по линейному закону нормальными силами $p(x) = px b_п$, эквивалентными изгибающему моменту M. Постоянные p и q могут быть найдены в виде

$$p = 24M_п/b_п^4, \tag{2.16}$$

и

$$q = P/b_п. \tag{2.17}$$

Средние значения дополнительных перемещений основания перемычки определяются по формулам

$$\bar{u} = q\vartheta \cdot \frac{b_п}{2} L(l),$$

$$\bar{\gamma}_{осн} = p\vartheta \left(\frac{b_п}{2}\right)^2,$$

где $L(l)$ — функция, зависящая от координаты на границе полуплоскости неподвижной точки (рис. 7).

С учетом значений p и q выражения для перемещений основания перемычки, осредненные по ее ширине, примут вид

$$\bar{u} = p\frac{\vartheta}{2}L(l) \tag{2.18}$$

$$\bar{\gamma}_{осн} = \frac{6M_п}{b_п^2}\vartheta. \tag{2.19}$$

Найденные средние величины упругой деформации прилежащей к перемычке части щеки вызовут дополнительный поворот перемычки на угол

$$\varphi_{осн} = \bar{\gamma}_{осн} + \bar{u}/l_п \tag{2.20}$$

После подстановки в (2.20) $\bar{\gamma}_{осн}$ и $\bar{u}$ получим

$$\varphi_{осн} = \frac{6M_п}{b_п^2}\vartheta + \frac{P}{l_п}\cdot\frac{\vartheta}{2}L(l). \tag{2.21}$$

Поскольку формула (2.21) получена из решения задачи о полуплоскости, то в ней под M и P понимаются удельные силовые факторы, отнесенные к толщине рассматриваемого элемента. Высота перемычки равна

$$H_п = (R_{1п} - R_{2п}), \tag{2.22}$$

где R_1, R_2 — наружный (внутренний) радиус перемычки.

В зависимости от конструктивного исполнения щек водила в деформировании прилежащей к перемычке части щеки водила принимает участие ее бóльшая или меньшая часть. Чем выше щека водила, тем на меньшую величину деформирует основание перемычки. Напротив, максимальный будет деформация основания перемычки в том случае, когда высота ее будет равна высоте щеки водила. Это обстоятельство может быть учтено, если вместо (2.22) ввести в рассмотрение эффективную высоту перемычки

$$H_{п.эф} = H_п\left(\frac{H_щ}{H_п}\right)^3 = H_щ\left(\frac{H_щ}{M_п}\right)^2. \tag{2.23}$$

Введенный в формулу эмпирический коэффициент характеризует тот факт, что с уменьшением высоты перемычки по сравнению с высотой щеки податливость основания перемычки уменьшается быстрее, чем отношение $H_щ/H_п$. Можно предположить, что это обстоятельство будет сказываться только при $H_щ > 1{,}5H_п$, поэтому в формулу для $\varphi_{осн}$ введем эмпирический коэффициент $(H_щ/1{,}5H_п)^3$.

Таким образом, формула (2.21) может быть записана в виде

$$\varphi_{осн} = \frac{1,5P}{l_п H_щ}\left(\frac{1,5H_п}{H_щ}\right)^2 \cdot \frac{\vartheta}{2}\left[\frac{12l_п}{b_п^2} \cdot \frac{M_п}{P} + L(l)\right]. \qquad (2.24)$$

Формула (2.24) получена для деформации части щеки, прилежащей к перемычке; аналогичная формула может быть получена и для второй щеки водила. В зависимости от условий закрепления водила в корпусе планетарного механизма величина изгибающего момента, приходящегося на основание перемычки, будет изменяться, поэтому в формуле (2.24) для сохранения общности можно принять

$$M_п = Pl_п K_п,$$

что после подстановки в (2.24) даст

$$\varphi_{осн} = \frac{1,5P}{l_п H_щ}\left(\frac{1,5H_п}{H_щ}\right)^2 \frac{\vartheta}{2}\left[12\left(\frac{l_п}{b_п}\right)^2 K_п + L(l)\right], \qquad (2.25)$$

где — $K_п$ — коэффициент, характеризующий характер подвода внешних сил к перемычкам водила.

Формула (2.25) включает вспомогательную функцию $L(l)$ координаты точки на границе полуплоскости, перемещение которой принимается равным нулю. Для определения этой функции воспользуемся тем обстоятельством, что срединная плоскость щеки водила принята неподвижной и воспользуемся зависимостью (1.29).

$$l^* = 0,7b_щ^*,$$

которая устанавливает связь между относительной координатой неподвижной точки l^* и относительной толщиной щеки водила

$$b_щ^* = b_щ/b_п.$$

Таким образом,

$$l^* = 0,7b_щ/b_п.$$

Из графика функции $L(l)$ (рис. 7) видно, что для распространенных конструкций корпуса водила можно принять следующую приближенную зависимость

$$L(l) = 2,15\sqrt{l^*}. \qquad (2.26)$$

С учетом (2.25) и (2.26) формула для $\varphi_{осн}$ (2.25) примет вид

$$\varphi_{осн} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \frac{1,5P}{l_п H_щ}\left(\frac{1,5H_п}{H_щ}\right)^2\left[\left(\frac{l_п}{b_п}\right)^2 K_п + 0,15\sqrt{\frac{b_щ}{b_п}}\right]. \qquad (2.27)$$

Второе слагаемое, входящее в (2.27) обычно значительно меньше первого слагаемого, поэтому можно сделать вывод о том,

что основной деформацией основания перемычки является поворот ее, вызванный изгибающим моментом $M_п$.
Суммарный угол перекоса осей сателлитов

$$\varphi = \varphi_п + \varphi_{1\,осн} + \varphi_{2\,осн}$$

найдется из зависимостей (2.7) и (2.27) в виде

$$\varphi = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{Pl_п}{F_п R_п} \left\{ \frac{1}{K_п(1-\nu)} + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{R_п}{b_п} \sum^{2} \left(\frac{1{,}5H_п}{H_{i\,щ}} \right)^3 \times \right.$$

$$\left. \times \left[K_{in} + 0{,}15 \left(\frac{b_п}{l_п} \right)^2 \sqrt{\frac{b_{i\,щ}}{b_п}} \right] \right\}. \qquad (2.28)$$

Формула (2.28) может быть использована для определения относительного угла перекоса осей сателлитов, обусловленного податливостью перемычек и прилежащей к ним части щек водила. Опуская из рассмотрения несущественные составляющие деформации элементов водила — кручение и сдвиг основания перемычек, формулу (2.28) можно представить в упрощенном виде

$$\varphi \approx \frac{2(1-\nu^2)}{EF_п} P \frac{l_п}{R_п} \left\{ \frac{1}{(1-\nu)} + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{R_п}{b_п} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{1{,}5H_п}{H_{1щ}} \right)^3 K_{1п} + \left(\frac{1{,}5H_п}{H_{2щ}} \right)^3 K_{2п} \right] \right\}. \qquad (2.29)$$

§ 3. Экспериментальные исследования деформации водила

Условия деформирования элементов водила отличаются от принятых при расчете по изложенным выше методикам. Естественно, что только сопоставление расчетных и экспериментальных величин деформации водила может дать возможность судить о применимости приближенных расчетных зависимостей и в случае необходимости вводить в них поправочные коэффициенты. В связи с этим рассмотрим результаты экспериментального измерения деформации водила.

В работах [27, 33] приведены результаты экспериментального определения относительных смещений щек водила, полученные на моделях из оргстекла. Моделировалась трехсателлитная планетарная передача, размеры испытанных моделей представлены на рис. 48. В табл. 29 приведены экспериментальные и расчетные значения относительных смещений щек водила, определенные по различным расчетным формулам.

Из табл. 29 видно, что расчет по формуле (2.29) первых трех типов водила дает заниженные (на 10—20%) значения деформа-

Таблица 29. **Сопоставление экспериментальных и расчетных значений относительных смещений щек водила**

Тип водила	$w_э$ [33], *мк*	$w_р$ [33], *мк*	$\frac{w_э}{w_р}$ [33]	$w_р$ [48], *мк*	$\frac{w_э}{w_р}$ [48]	$w_р$ [29], *мк*	$\frac{w_э}{w_р}$ [29]
г	36,6	45,2	0,81	56,8	0,65	60	0,61
а	34,5	40,5	0,85	20,7	1,67	56,8	0,61
б	28	22,8	1,23	20,7	1,35	20,7	1,35
д	15	12	1,25	20,7	0,73	45,7	0,33
в	7	5,3	1,32	20,7	0,34	20,7	0,34

Тип водила	$w_п$ (2.7), *мк*	$w_{щ1}$ (2.27) *мк*	$w_{щ2}$ (2.27) *мк*	$w_р$ (2.29) *мк*	$w_э/w_р$ (2.29)	$w'_п$, *мк*	$w'_{щ1}$ *мк*	$w'_{щ2}$ *мк*	$w'_р$ *мк*	$w'_э/w'_р$
г	23,2	3,8	3,8	30,8	1,19	30,1	3,4	3,4	36,9	0,99
а	16,6	3,8	12	32,4	1,07	21,5	3,4	10,7	35,6	0,97
б	16,6	3,8	3,8	24,2	1,16	21,5	3,4	3,4	28,3	0,99
д	16,6	3,8	12	32,4	0,46	—	—	—	—	—
в	16,6	3,8	3,8	24,2	0,29	—	—	—	—	—

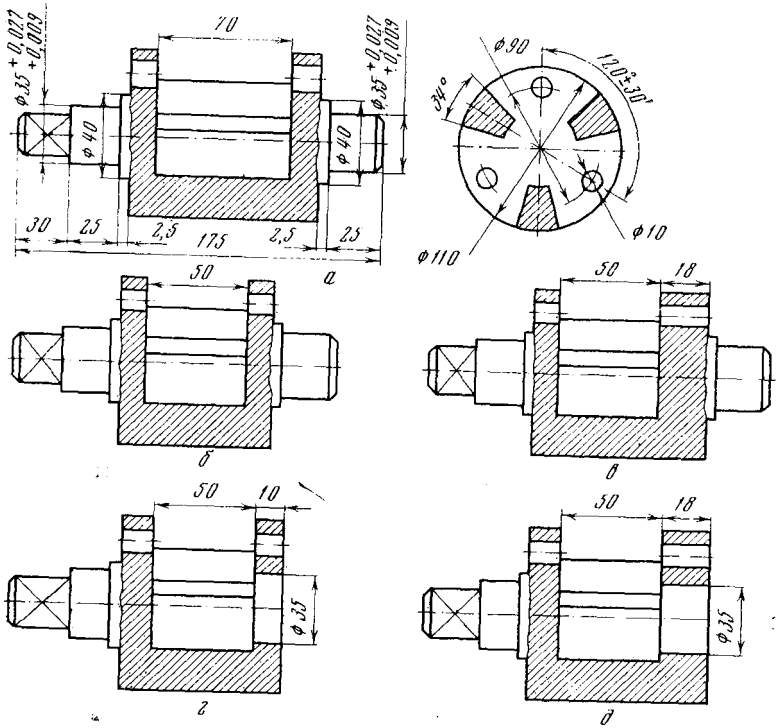
ции водила, в то время как другие расчетные методики дают как завышение, так и занижение расчетных деформаций по сравнению с экспериментальными значениями. Это обстоятельство указывает на то, что существующие методы расчета податливости водила нуждаются в корректировке. Формула (2.29) учитывает лишь часть компонент деформации элементов, поэтому она может давать лишь заниженные значения суммарной податливости водила.

Сопоставление экспериментальных с расчетными значениями деформации водила, определенными по формуле работы [48], показывает, что последняя не может быть использована для оценки податливости водила планетарных механизмов с массивными щеками. Действительно, предположение только об изгибной деформации перемычки дает для четырех последних типов водила постоянную величину деформации, равную 20,7 *мк*, в то время как эксперимент показывает, что деформация водила изменяется несколько раз.

Однако экспериментальные значения деформации водила двух последних типов по-видимому значительно занижены. Предположим, что суммарное относительное перемещение щек водила может быть определено как

$$\varphi = \varphi_п + \varphi_{щ1} + \varphi_{щ2}, \tag{3.1}$$

где $\varphi_п$ — смещение, обусловленное податливостью перемычки, $\varphi_{щ1}$, $\varphi_{щ1}$ — смещение, обусловленное податливостью прилежащей к перемычке части первой (второй) щеки водила.



Р и с. 48. Испытанные модели водила из оргстекла

Случаи «а» и «б» отличаются только длиной перемычки, поэтому величины $\varphi_{щ1}$ и $\varphi_{щ2}$ для них могут быть приняты постоянными и равными между собой, а изменяется только $\varphi_п$ в соответствии с длиной перемычки. Полагая, что перемычка претерпевает сдвиговую деформацию, получим систему уравнений

$$\Delta^а_п + \Delta^а_{щ1} + \Delta^а_{щ2} = 34{,}5 \text{ мк}, \qquad \Delta^б_п + \Delta^б_{щ1} + \Delta^б_{щ2} = 28{,}0 \text{ мк},$$

$$\Delta^а_п / \Delta^б_п = l^а_п / l^б_п, \tag{3.2}$$

из которой (приняв $\Delta^а_{щ1} = \Delta^а_{щ2} = \Delta^б_{щ2} = \Delta^б_{щ1} = \Delta_щ$) получим

$$\Delta^а_п = 22{,}8 \text{ мк}; \qquad \Delta^б_п = 16{,}2 \text{ мк}; \qquad \Delta_щ = 5{,}9 \text{ мк}. \tag{3.3}$$

Из зависимостей (3.3) получаем, что для рассматриваемого эксперимента суммарная деформация водила не может быть меньше деформации перемычки и первой щеки (которая для всех типов водила оставалась неизменной), т. е.

$$\Delta = \Delta_{п1} + \Delta_{щ1} = 22{,}1 \text{ мк}. \tag{3.4}$$

Таким образом, экспериментальные значения деформации водила в последних двух случаях оказались меньше минимально возможной величины (3.4). Это дает основание усомниться в правильности экспериментальных данных для водил типа «д» и «в».

Расчетные значения деформации водила, определенные по формуле (2.29), занижены в среднем на 14% по сравнению с экспериментальными значениями для первых трех типов водила. По-видимому, это связано с тем, что действительная деформация перемычки водила складывается как из сдвиговой, так и изгибной составляющей, которая в расчете не учитывалась. Это обстоятельство может быть учтено умножением первого слагаемого формулы (2.29) на эмпирический коэффициент $K_п = 1{,}3$.

Другим недостатком формулы (2.29) является независимость $\varphi_{осн}$ от толщины щеки, что, очевидно, связано с предположением, что срединная плоскость не искривляется под действием изгибающего момента от перемычек. Для учета этого обстоятельства введем . пирический коэффициент жесткости щеки водила $(R_щ/b_щ)^3$. Известно, что для тонких пластинок отношение $(R_щ/b_щ)$ не может быть меньше 5. Поэтому дл учета неплоской деформации срединной плоскости щеки водила введем эмпирический коэффициент жесткости щеки

$$K_щ = \left(\frac{R_щ}{5{,}75 b_щ}\right)^3. \tag{3.6}$$

С учетом сказанного эмпирическая формула для определения относительного угла сдвига щек водила примет вид

$$\varphi = \varphi_п K_п + \varphi_{щ1} K_{щ1} + \varphi_{щ2} K_{щ2}$$

или

$$\varphi = \frac{2(1-\nu^2)}{EF_п} P \frac{l_п}{R_п} \left\{ \frac{1{,}3}{1-\nu} + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{R_п}{b_п} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{1{,}5 H_п}{H_{щ1}}\right)^3 \left(\frac{R_{щ1}}{5{,}75 b_{щ1}}\right)^3 K_{п1} + \left(\frac{1{,}5 H_п}{H_{щ2}}\right)^3 \left(\frac{R_{щ2}}{5{,}75 b_{щ2}}\right)^3 K_{п2} \right] \right\}. \tag{3.7}$$

Откорректированные по формуле (3.7) расчетные значения деформации элементов водила также приведены в табл. 29.

Формула (3.7) может быть рекомендована для практического использования, при этом, однако, следует иметь в виду, что входящие в нее эмпирические коэффициенты, получены на основе изложенного выше эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Деформативность элементов и соединений планетарных механизмов существенно влияет на их эксплуатационные характеристики, поэтому выполненное исследование посвящено изучению таких вопросов, как деформативность зубьев и шлицов, ободьев зубчатых колес и шлицевых муфт, сателлитного узла.

1. Деформация прямых зубьев зубчатых колес определена поэлементно, как сумма изгибной деформации основания и контактной составляющих. Изгибная составляющая деформации зубьев определена заменой зуба клином, вписанным в него, на основании известного решения задачи теории упругости о клине, нагруженном в вершине системой сил. Установлено, что изгибная составляющая деформации зубьев практически не зависит от числа зубьев зубчатого колеса (при $z \geqslant 40$).

При определении деформации основания зуба прилежащую к зубу часть обода зубчатого колеса представляли в виде полуплоскости (или тонкой полосы — в зависимости от конструктивного исполнения обода).

Показано, что деформация основания зуба состоит из двух компонент, первая из которых зависит от положения точки приложения нагрузки на боковой поверхности зуба, а вторая — от координаты неподвижной точки на границе полуплоскости (полосы).

Контактная составляющая деформации зубьев определена на основе известного решения контактной задачи теории упругости о цилиндрах с параллельными осями. Наибольшую сложность при решении представляет обоснованный выбор базовых точек, сближение которых принимается за меру контактной деформации зубьев. Установлено, что за базовые могут быть приняты точки, находящиеся на расстоянии $10\,b$ (b — полуширина площадки контакта) от точки начального контакта зубьев. При таком выборе базовых точек контактная деформация зубьев линейно зависит от нагрузки, что упрощает практические расчеты.

Сопоставление расчетных и экспериментальных деформаций прямых зубьев дало их хорошее совпадение, что позволяет рекомендовать разработанный метод определения деформации прямых зубьев в расчетную практику. Для упрощения расчетов для цилиндрических зубчатых колес с дисковой формой обода результаты расчета суммарной деформации зубьев аппроксимированы косинусоидой.

Дальнейшие теоретические исследования деформации прямых зубьев, по-видимому, следует проводить, отказавшись от поэле-

ментного ее представления, с использованием конформного отображения численными методами. Это позволит получить строгие решения с учетом действительной формы переходной кривой при различном конструктивном исполнении ободьев зубчатых колес. Экспериментальные исследования деформации прямых зубьев следует продолжать для определения влияния, оказываемого погрешностями монтажа зубчатых колес (непараллельность, перекос) и геометрическими параметрами зубьев и ободьев зубчатых колес. Исследования на моделях и стендах дадут возможность исключить вспомогательные факторы, снижающие точность эксперимента.

2. Разработан метод определения деформации косых зубьев, основанный на введении модели упругого основания, имитирующего деформирование косых зубьев. В соответствии со свойствами введенного упругого основания, косой зуб представляется набранным из прямых зубьев, полученных рассечением косого зуба рядом плоскостей, параллельных торцевой плоскости зубчатого колеса; принято допущение о неискривляемости образованных прямых зубьев, что соответствует равенству нулю осевых смещений точек контактной линии и существованию между прямыми зубьями только сдвиговых связей.

Модель упругого основания и принятые допущения о характере деформирования зубьев позволили, на базе решенной задачи о деформации прямых зубьев, получить в замкнутом виде решение задачи о контакте косых зубьев, включающее как определение деформации зубьев, так и распределение нагрузки по длине контактных линий. Получено решение задачи при наличии и отсутствии технологических погрешностей зубчатых колес. При учете влияния деформации других элементов зубчатой передачи на характер контактирования косых зубьев (ободья зубчатых колес, валы, опоры) принято допущение, значительно упрощающее расчет, не снижая его точности, заключающееся в том, что на деформирование этих деталей влияет средняя удельная нагрузка, распределенная по длине контактной линии,— являющееся распространением принципа Сен-Венана на зубчатую передачу.

Уточнены два метода — статический и резонансный — экспериментального определения жесткости косозубого зубчатого зацепления. В первом методе жесткость зубчатого зацепления определяется по результатам измерения упругих смещений зубчатых колес, а во втором методе — по результатам определения собственных частот упругой системы, включающей зубчатые колеса.

Дальнейшие теоретические исследования деформации косых зубьев, по-видимому, следует проводить, отказавшись от поэлементного ее представления. В этом направлении могут быть эффективными два подхода. Во-первых, применение численных методов при решении пространственной задачи о деформировании косых зубьев; во-вторых, принятие ряда простых гипотез о харак-

тере деформирования зубьев и проверка их экспериментальным путем.

Экспериментальные исследования деформации косых зубьев, по-видимому, следует проводить с целью оценки влияния, оказываемого погрешностями монтажа зубчатых колес и геометрическими параметрами зубьев и ободьев зубчатых колес, а также проверки гипотез, позволяющих получать приближенные решения задачи о деформации косых зубьев в замкнутом виде.

3. Деформация шлицов при отсутствии перекоса осей муфт определена поэлементно, как сумма изгибной, основания и контактной составляющих. Изгибная составляющая деформации шлицов определена из решения задачи о тонкой консольной пластине, нагруженной по боковой поверхности распределенной нагрузкой (шлицы с прямолинейной образующей) или линейной нагрузкой (шлицы с криволинейной образующей).

Деформация основания шлица определена так же, как и для прямых зубьев, а контактная составляющая деформации шлицов найдена по опытным данным о контакте шероховатых поверхностей (шлицы с прямолинейной образующей) и из решения задачи о контакте цилиндра с плоскостью (шлицы с криволинейной образующей).

Деформация шлицов при наличии перекоса осей муфт определена с использованием гипотезы Винклера, однако в отличие от традиционного применения этой гипотезы, коэффициент постели, характеризующий упругие свойства шлицов, построен на базе полученных решений о деформации шлицов при отсутствии перекоса осей муфт. Такой подход к оценке деформации шлицов позволяет получить достаточно простые формулы, не снижая точность расчета, поскольку принятое допущение относится к выбору вспомогательной величины (коэффициент постели упругого основания).

Разработан тензометрический метод определения деформации шлицов, суть которого заключается в определении начальных зазоров между зубьями по результатам измерения окружных шагов шлицевых венцов и последующем тензометрировании шлицов с различными величинами исходных зазоров. Практическая проверка предложенного метода подтвердила существование линейной зависимости между относительными деформациями, регистрируемыми тензодатчиками, и величиной исходного зазора между зубьями, что позволяет косвенным путем находить деформацию шлицов. Установлено, что дополнительная деформация шлицов, обусловленная податливостью обода муфты, не превосходит 10% от суммарной деформации шлицов.

Дальнейшие теоретические исследования деформации шлицов, по-видимому, следует проводить в направлении поиска обоснованных допущений, упрощающих расчет и позволяющих получить решение в замкнутом виде. Экспериментальные исследования следует проводить с целью оценки влияния перекоса осей муфт

и геометрических параметров шлицов и ободьев муфт на величину деформации шлицов.

4. Деформация ободьев центральных колес определена на базе метода единичной нагрузки Бицено, что позволило оценивать напряженное и деформированное состояния ободьев кольцевой формы при произвольной системе сил, действующих от сателлитов. При равных нагрузках на сателлитах определены составляющие упругой линии центральных колес двух типов — свободное кольцо и кольцо, соединенное с оболочкой.

Экспериментальная проверка напряженного состояния эпицикла показала хорошее соответствие расчетных и измеренных относительных деформаций; установлено, что в зоне нагруженного зуба возмущение поля напряжений от зуба значительно искажает эпюру расчетных изгибных напряжений; показано, что реактивная нагрузка в шлицевом соединении эпицикл — блокирующая муфта практически не влияет на напряженное состояние эпицикла.

Предложена зависимость для оценки влияния зубьев на жесткость обода зубчатого колеса. Выполнена экспериментальная проверка трех методов оценки влияния зубьев на жесткость обода эпицикла — по перемещениям, по напряжениям, по положению нейтральной линии. Показана их полная идентичность и предложены рекомендации по учету влияния зубьев при тарировании ободьев зубчатых колес.

Теоретические исследования деформации ободьев центральных колес, по-видимому, должны проводиться в направлении строгого учета взаимодействия между ободом и нагруженным зубом с учетом концентрации напряжений в основании зубьев для различных конструктивных схем ободьев зубчатых колес. Экспериментальные исследования, по-видимому, должны проводиться для оценки напряженного состояния в зоне нагруженного зуба при различных соотношениях толщин зубьев и ободьев зубчатых колес.

5. Деформация обода сателлита определена на базе метода единичной нагрузки Бицено с использованием решения Папковича П. Ф. по расчету верхнего кольца жестких барабанов башенных артиллерийских установок. Получены зависимости для оценки напряженного и деформированного состояний обода сателлита, оценены границы нагрузок, при которых следует учитывать распределенный характер усилий в соединении сателлит — ось сателлита.

Теоретические и экспериментальные исследования деформации ободьев сателлитов должны, по-видимому, проводиться с целью оценки влияния реактивной нагрузки в соединении сателлит — ось сателлита на напряженное и деформированное состояния обода сателлита, а также характера совместного деформирования нагруженного зуба и обода сателлита с учетом концентрации напряжений в основании зубьев.

6. Деформация ободьев шлицевых муфт определена поэлементно, как сумма периодической и осесимметричной составля-

ющих. Периодическая составляющая определена как деформация кольца, нагруженного системой распределенных периодических нагрузок; осесимметричная составляющая определена как деформация короткой цилиндрической оболочки при соответствующих условиях закрепления на торце.

Выполнено экспериментальное исследование напряженного состояния блокирующей муфты. Показано, что принятая приближенная методика оценки напряженного и деформированного состояния шлицевых муфт в основном хорошо соответствует полученным экспериментальным данным.

Дальнейшие теоретические исследования деформации ободьев шлицевых муфт, по-видимому, должны проводиться на базе моментной теории тонких оболочек, а также путем изучения совместного деформирования элементов уравнительного механизма с учетом упругого слоя (шлицевого соединения) между муфтами. Экспериментальные исследования деформации ободьев шлицевых муфт, по-видимому, следует проводить в направлении всестороннего изучения напряженного состояния, включая и торцевые участки, где проявляется краевой эффект.

7. Деформация оси сателлита определена поэлементно, как сумма составляющих изгиба, сдвига и контактной. Изгибная и сдвиговая составляющие деформации определены из решения задачи о брусе, установленном на двух опорах конечной длины. Составляющая овализации определена на базе структурной формулы для кольца, сжимаемого двумя силами, с привлечением экспериментальных данных по деформации поршневого пальца авиационного двигателя. Показано, что составляющая овализации значительно превосходит изгибную составляющую деформации оси сателлита, на основании чего предложены практические рекомендации по установке тензодатчиков на осях сателлитов при исследовании распределения нагрузки между сателлитами.

Контактная составляющая деформации оси сателлита определена на базе решения контактной задачи теории упругости о плотном контакте цилиндра и цилиндрической полости.

Экспериментальное исследование напряженного и деформированного состояния оси сателлита показало, что суммарная податливость оси сателлита может в некоторых случаях превосходить деформацию зубчатых зацеплений. Это вызывает необходимость решения задачи о деформации оси сателлита в более строгой постановке.

Дальнейшие теоретические исследования деформации оси сателлита, по-видимому, следует проводить, отказавшись от поэлементного определения деформации, и рассматривать ось сателлита как толстостенную трубу, контактирующую с сопряженными деталями (сателлит, щеки водила). Экспериментальные исследования должны быть направлены на изучение деформированного состояния оси сателлита при различных геометрических разме-

рах сателлита и щек водила и проверку тех упрощений, которые позволят получать решение в замкнутом виде.

8. Деформация водила определена поэлементно, как сумма сдвиговой и крутильной составляющих перемычек, а также сдвиговой деформации щеки и деформации прилежащей к перемычке части щеки. Конструкции водил современных тяжелонагруженных планетарных механизмов таковы, что едва ли следует считаться с изгибной деформацией щек и перемычек водила.

Сопоставление результатов расчета с известными экспериментальными исследованиями деформации водила показали их хорошее соответствие, при этом расчетная деформация была на $10 \div 20\%$ меньше измеренной деформации водила. Выполненное сопоставление позволило ввести в расчетную формулу эмпирический коэффициент и рекомендовать ее для практического использования.

Экспериментальные исследования деформации водила, по-видимому, следует проводить в модельных условиях, варьируя в широких пределах геометрические размеры щеки и перемычек водил. Это позволит получить эмпирические коэффициенты, которые можно включать в полученную структурную формулу для деформации водила.

9. Предложенные методы расчета деформативности элементов и соединений планетарных механизмов, наряду с самостоятельным значением, могут быть использованы для решения задач статики планетарных механизмов таких, как: распределение нагрузки между сателлитом с учетом погрешностей и упругого деформирования зубчатых зацеплений; распределение нагрузки между зубьями в зацеплении; распределение нагрузки по длине контактных линий; распределение нагрузки между шлицами с учетом погрешностей и упругого деформирования ободьев шлицевых муфт; распределение нагрузки между шлицами при перекосе осей муфт и др. В связи с этим при теоретических и экспериментальных исследованиях деформативности планетарных механизмов следует искать обоснованные упрощения и допущения, которые позволяли бы получать окончательные решения в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Абрамов, Ю. А. Державец, О. А. Пыж.* Шевронный планетарный редуктор с двумя плавающими звеньями.— «Вестник машиностроения», 1961, № 4.
2. *Э. Л. Айрапетов.* Исследование податливости уравнительных механизмов судовых планетарных редукторов. Канд. дисс. М., 1966.
3. *Э. Л. Айрапетов.* Определение контактной деформации зубьев цилиндрических зубчатых колес.— «Вестник машиностроения», 1967, № 1.
4. *Э. Л. Айрапетов.* Распределение нагрузки в зубчатых муфтах.— Сб. «Технология и качество зубчатых и червячных передач», ч. 2. Ереван, изд. ЕПИ, 1971.
5. *Э. Л. Айрапетов, М. Д. Генкин.* Податливость обода эпицикла планетарного редуктора.— Изв. вузов, Машиностроение, 1967, № 1
6. *Э. Л. Айрапетов, Д. И. Колин.* Об одной модели упругого основания.— Сб. «Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». «Наука», 1971.
7. *Э. Л. Айрапетов, М. Д. Генкин, Д. И. Колин.* Податливость прямозубого зубчатого зацепления.— Сб. «Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами». «Наука», 1971.
8. *Э. Л. Айрапетов, Д. И. Колин.* Податливость шлицевых муфт уравнительных механизмов планетарных редукторов.— Сб. «Надежность и качество зубчатых передач», № 18-67-69, НИИинформтяжмаш, 1967.
9. *Э. Л. Айрапетов, М. Д. Генкин, Д. И. Колин.* Распределение нагрузки вдоль контактной линии в косозубом зубчатом зацеплении.— Сб. «Технология и прочность зубчатых и червячных передач», ч. 2. Ереван, изд. ЕПИ, 1971.
10. *А. Т. Алтухов.* К расчету на прочность шлицевых муфт реактивных двигателей.— Труды РКВИАВУ, вып. 39, Рига, 1957.
11. *В. Д. Андожский, А. И. Ефимович.* Теоретическое определение контактной деформации зубьев.— Сб. «Зубчатые и червячные передачи». М.— Л., Машгиз, 1959.
12. *К. Арнаудов.* Въеху пякоп принципи положения при изравняване на натоварненето в планетните зъбни предивки.— «Машиностроение», 1963, № 2.
13. *С. М. Башеев, В. Е. Антонюк.* Расчет прочности обода одновенцового сателлита планетарной передачи 2К-Н.— Изв. вузов, Машиностроение, 1965, № 1.
14. *Н. И. Безухов.* Основы теории упругости пластичности и ползучести.— «Высшая школа», 1968.
15. *Н. М. Беляев.* Местные напряжения при сжатии упругих тел.— Сб. «Труды по теории упругости и пластичности», Гостехиздат, 1957.
16. *И. А. Биргер, Б. В. Шорр, Р. М. Шнейдерович.* Расчет на прочность деталей машин.— «Машиностроение», 1966.
17. *К. Б. Бицено, Р. Граммель.* Техническая динамика, т. 1, М.— Л., 1950.
18. *Ю. А. Бордуков, М. Д. Моломин.* Некоторые вопросы исследования планетарных передач.— Труды РИИГА, вып. 55, Рига, 1965.
19. *Д. В. Вайнберг.* Напряженное состояние составных дисков и пластин. Киев, Изд-во АН УССР, 1952.
20. *В. З. Власов.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избранные труды, т. 1. Изд-во АН СССР, 1962.
21. *Д. П. Волков, А. Ф. Крайнов.* Планетарные, волновые и комбинированные передачи строительных и дорожных машин.— «Машиностроение», 1968.

22. Вопросы прочности цилиндрических оболочек.— Сб. переводов под ред. В. М. Даревского. Оборонгиз, 1960.
23. *Н. И. Воронцов* и др. Тензометрирование деталей автомобиля. Машгиз, 1962.
24. *В. А. Гавриленко.* Зубчатые передачи в машиностроении (теория эвольвентных зубчатых передач). Машгиз, 1962.
25. *Гаррис, Брошард.* Исследование усовершенствованного подшипника планетарной зубчатой передачи.— Труды Американского общества инженеров-механиков, серия Д. ИЛ, 1964, № 3.
26. *М. Д. Генкин, А. А. Жирнов, Л. В. Сухоруков.* Резонансный метод определения жесткостей зубчатых зацеплений.— Сб. «Надежность и качество зубчатых передач», № 18-67-65. М., НИИинформтяжмаш, 1967.
27. *И. П. Горобец.* Исследование и выбор жесткости элементов деталей планетарных передач. Канд. дисс. Одесса, 1968.
28. *М. Б. Громан.* Концентрация нагрузки по ширине зубчатых колес.— Сб. «Расчет и конструирование деталей машин». Машгиз, 1956.
29. *Ю. А. Державец.* Расчет планетарных передач мощных и быстроходных приводов.— Сб. «Проектирование и производство планетарных зубчатых передач. Материалы всесоюзного семинара 17—19 апреля 1967 г.» Л., ЛДНТП, 1967.
30. *Джонс, Гаррис.* Анализ работы роликов встроенного в зубчатое колесо подшипника с деформируемой конструкцией наружного кольца.— Труды Американского общества инженеров-механиков, серия Д. № 2. ИЛ, 1963.
31. *А. Н. Динник.* Удар и сжатие упругих тел. Избранные труды, т. 1, Киев. Изд-во АН УССР, 1952.
32. *К. И. Заблонский.* Вопросы жесткости зубчатых передач большой мощности и методика их расчета.— Сб. «Передачи в машиностроении». Изд-во АН СССР, 1959.
33. *К. И. Заблонский, И. П. Горобец.* Жесткость водила планетарных передач 2К-Н.— Сб. «Надежность и качество зубчатых передач», № 18-67-46, НИИинформтяжмаш, 1967.
34. *К. И. Заблонский.* Жесткость зубчатых передач. Киев, «Техника», 1967.
35. *К. И. Заблонский.* Исследование и расчет распределения нагрузки в зацеплении зубчатых передач. Докт. дисс. Одесса, 1966.
36. *А. П. Захаров.* Расчет консольной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной по свободному краю равномерно распределенными поперечными силами.— Сб. «Прочность цилиндрических оболочек». Оборонгиз, 1959.
37. *А. П. Захарова.* Расчет на изгиб консольной цилиндрической оболочки, подкрепленной упругим кольцом.— Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 2. «Машиностроение», 1965.
38. *С. М. Кан.* Строительная механика оболочек.— «Машиностроение», 1966.
39. *М. С. Кауфман.* Планетарные передачи с гибкими венцами.— «Вестник машиностроения», 1960, № 9.
40. *Р. С. Кинасошвили.* Расчет поршневого пальца авиационного двигателя.— Труды ЦИАМ, № 119. Оборонгиз, 1947.
41. *Б. С. Ковальский.* Проблема грузоподъемности крановых ходовых колес. ИМАШ, 1943.
42. *Н. В. Колкунов.* Основы расчета упругих оболочек.—«Высшая школа», 1963.
43. *Я. И. Короткин* и др. Строительная механика корабля и теория упругости, т. 1. Л., «Судостроение», 1968.
44. *А. Д. Короб.* Влияние зубьев на жесткость обода зубчатого колеса.— Изв. вузов, «Машиностроение», 1953, № 5.
45. *А. А. Кроль.* О некоторых особенностях экспериментального исследования планетарных передач с датчиками в осях сателлитов.— Труды РИИГА, вып. 45, Рига, 1964.
46. *В. Н. Кудрявцев.* Зубчатые передачи, М., Машгиз, 1957.
47. *В. Н. Кудрявцев.* Планетарные передачи. Л., «Машиностроение», 1966.

48. *Б. В. Кузин.* О расчете на прочность некоторых деталей забойных двигателей.— «Расчеты на прочность», вып. 9, 1963.
49. *В. А. Лифанов.* Исследование распределения напряжений в элементах зубчатых колес. Канд. дисс. М., 1955.
50. *М. В. Мышалова.* Исследование распределения нагрузки между сателлитами планетарных передач авиационных механизмов.— Сб. «Некоторые вопросы исследования авиационных планетарных передач».— Труды РИИГА, вып. 45. Рига, 1964.
51. *П. Ф. Папкович.* Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
52. *П. Ф. Папкович.* Труды по вибрации корабля. Л., Судпромгиз, 1960.
53. *П. Ф. Папкович.* Труды по строительной механике корабля, т. 2. Л., Судпромгиз, 1962.
54. *А. И. Петрусевич.* Зубчатые передачи.—Сб. «Детали машин», т. 1, М., 1953.
55. *А. И. Петрусевич.* Контактные напряжения, деформации и контактно-гидродинамическая теория смазки. Докт. дисс., М., 1950.
56. *А. И. Петрусевич, М. Д. Генкин, В. К. Гринкевич.* Динамические нагрузки на зубьях прямозубых зубчатых колес. М., Изд-во АН СССР, 1956.
57. Прочность, устойчивость, колебания, т. 1. «Машиностроение», 1968.
58. *Л. Н. Решетов.* Конструирование рациональных механизмов. «Машиностроение», 1967.
59. *Л. Н. Решетов.* Рациональное конструирование многосателлитных механизмов.— Изв. вузов. «Машиностроение», 1962, № 2.
60. *Д. Н. Решетов, З. М. Левина.* Расчеты на контактную жесткость в машиностроении.— Сб. «Вопросы прочности материалов и конструкций». Изд-во АН СССР, 1959.
61. *Н. Ф. Руденко.* Планетарные передачи. Машгиз, 1947.
62. *Э. В. Рыжов.* Контактная жесткость деталей машин.— «Машиностроение», 1966.
63. *И. А. Симвулиди.* Расчет инженерных конструкций на упругом основании. Росвузиздат, 1963.
64. *Н. Г. Тевс, Н. С. Ковердяев, С. Д. Рехтер.* Редукторостроение на Ново-Краматорском заводе, Машгиз, 1946.
65. *С. П. Тимошенко, С. Войновский — Кригер.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.
66. *С. П. Тимошенко* и др. Расчет и конструирование шестерен. «Мировая техника», серия «Машиностроение», вып. 4. ОНТИ, 1934.
67. *С. П. Тимошенко.* Сопротивление материалов, т. 1, «Наука», 1965.
68. *В. А. Ткаченко.* Проектирование многосателлитных планетарных передач. Харьков, 1961.
69. *А. А. Уманский.* Строительная механика самолета. Оборонгиз, 1961.
70. Усталость металлов.— Сб. переводов под ред. проф. Г. В. Ужика. Изд-во АН СССР, 1961.
71. *Ю. Н. Федосеев.* К составлению уравнений движения многомассовых пространственных систем.— «Машиноведение», 1969, № 6.
72. *А. Феппль, Л. Феппль.* Сила и деформация, т. 1. Гостехиздат, 1933.
73. *Ф. Флюгге.* Статика и динамика оболочек. Госстройиздат, 1961.
74. *И. Н. Френкель.* Влияние упругой деформации части обода, прилегающей к зубу, на жесткость зацепления.— Сб. «Вопросы геометрии и динамики зубчатых передач». Изд-во АН СССР, 1963.
75. *И. Н. Френкель, И. К. Дядькин.* Жесткость косозубого зубчатого зацепления.— Сб. «Технология и прочность зубчатых и червячных передач», ч. 2. Ереван, изд. ЕПИ, 1971.
76. *И. Н. Френкель.* Исследование жесткости прямых зубьев цилиндрических зубчатых колес. Канд. дисс. Одесса, ОПИ, 1955.
77. *И. Н. Френкель.* Определение изгибных перемещений зубьев методом теории упругости.— Сб. «Проблемы качества и прочности зубчатых передач», № 2, М., ЦБТИ, 1961.
78. *И. Н. Френкель.* Экспериментальное определение суммарной деформации и жесткости прямых зубьев цилиндрических зубчатых колес.— Сб. «Зубчатые и червячные передачи», М.— Л., Машгиз, 1959.

79. *И. Н. Френкель, Я. Г. Кистьян.* Экспериментальное определение жесткости зубьев прямозубых цилиндрических колес внешнего зацепления.— Сб. «Повышение нагрузочной способности зубчатых передач и снижение их веса», кн. 81. Машгиз, 1956.
80. *И. Н. Френкель.* Экспериментальное определение жесткости зубьев с углом наклона в 30° цилиндрических зубчатых колес.— Сб. «Расчет,конструирование и исследование передач». Вып. 3, Одесса, Изд. ОПИ, 1959.
81. Напряжение изгиба в зубьях зубчатых колес. Гл. 3 в кн.: «Определение напряжений в опасных сечениях деталей сложной формы. Метод неплоских сечений». Машгиз, 1958.
82. *И. М. Шапочкина.* О деформации гибкого колеса волновой передачи. «Машиноведение», 1966, № 4.
83. *Ю. А. Шиманский.* Строительная механика подводных лодок, Судстройиздат, 1948.
84. *И. Я. Штаерман.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехтеориздат, 1949.
85. *Л. Б. Эльштейн.* Конструкция и расчет шлицевых муфт для передачи мощности в авиадвигателях в условиях перекоса осей соединяемых агрегатов. Канд. дисс., 1951.
86. *A. Y. Attia.* Deflection of Spur Gear Teeth Cut in Thin Rims.— Transaction of ASME, Series B, **86**, 4, 1964.
87. *R. V. Baud* and *Peterson R. E.* Load and Stress Cycle in Gear Teeth.— Mechanical Engineering, **51**, 1929.
88. *A. W. Davis.* Marine Reduction Gearing.— Proc. Inst. Mech. Engrs., **170**, N 16 (1956).
89. *F. Fritsch.* Planetengetriebe.— «Osteroichische Ingenier-Zeitschrift», 1960, **3**. H. 11.
90. Hayashi Kunikazu, Kajiyama Tohru, Umezawa Kiyohiko, Uchibori Ryuichi Analysis of loading in cylindrical gear — ISME Semi-Internat.— Sympos. Papers, Tohyo, 1967.
91. Hayashi Kunikazu, Sayame Takehide Load Distribution on the Contact Line of Helical Gear Teeth.— Bull. ISME 1963, **6**, N 22.
92. *I. Hert.* Pruzne Deformace primych zubu celnich kol.— Stroyirenstvi, **13**, 1963.
93. The Institute of Marine Engineers, Transaction, 1955, N 6.
94. *T. I. Yaramillo.* Deflection and Moments due to Concentrated Load on a Cantilever-Plate.— J. of Applied Mechanics, March 1950, **17**, N 1.
95. *F. Karas.* Elastische Formänderung und Lastverteilung beim Doppeleingriff gerader Stirnradzähne.— VDI Forschungsheft 406, 1941, Bd. 12.
96. *Hajime Kugimiya.* Stresses in helical gear teeth.— «Bull. ISME», 1966, **9**, N 36.
97. *G. Lundberg.* Elastische Berührung zweier Halbraume.— Forsch. Ing. Wes. Bd. 10, 1939, N 5.
98. *G. Niemann.* VDI — Zeitschrift, 1964, N 4.
99. *G. Niemann, H. Rettig.* Error—Induced Dynamic Gear Tooth Loads.— Proc. of the International Conf. on Gearing, London, Sept. 1958.
100. *U. Schievelbusch.* Antriebselemente und Getriebe Konstruktion, 1965, Jg. 17, N 8.
101. *W. G. Stoeckight.* J. of the American Society of Naval Engineering, **60**, 1948.
102. *K. Ztölzle.*— Zahnräder und Zahoradgetribe.— VDI-Zeitschrift», 1962, **104**, N 6.
103. *W. A. Tuplin.* Dynamic Loads on Gear Teeth.— Machine Design, **25** N 10, October, 1953.
104. *Yamastita Sigeru.* Dynamische Zahnkräfte der Schrägstiroräder (1 Teil). Belastungsverteilung und Zusammenziehung an Zahnfuss der Schrägstirnräder.— Sci. Repts. Res. Insts. Tohoku Univ. 1968, A19, N 5—6.
105. *N. Waterworth.* Effect of Deflection of Gear and their Supports.— Proc. of the International Conference on Gearing, London, 1958.
106. *E. I. Wellauer, A. Seireg.* Bending strenght of gear teeth by cantilever-plate theory.— Trans. of the ASME, Paper N 59-A-50.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Введение 9

I. Деформативность зубьев и шлицов 15

Глава 1. **Деформация прямых зубьев** 15
§ 1. Изгибная деформация зубьев 16
§ 2. Деформация прилежащей к зубу части обода зубчатого колеса 20
§ 3. Контактная деформация зубьев 25
§ 4. Экспериментальные исследования деформации прямых зубьев 34

Глава 2. **Деформация косых зубьев** 41
§ 1. Методы определения деформации косых зубьев 41
§ 2. Модель упругого основания 47
§ 3. Деформация косого зуба 52
§ 4. Экспериментальные исследования деформации косых зубьев 62

Глава 3. **Деформация шлицов** 72
§ 1. Деформация шлицов при отсутствии перекоса осей муфт 74
§ 2. Деформация шлицов при наличии перекоса осей муфт 77
§ 3. Экспериментальные исследования деформации шлицов 90

II. Деформативность ободьев зубчатых колес и шлицевых муфт 98

Глава 4. **Деформация ободьев центральных колес** 98
§ 1. Метод элементарной нагрузки 99
§ 2. Симметричная деформация центрального колеса 109
§ 3. Дополнительная деформация зубьев, обусловленная податливостью ободьев центральных колес 120
§ 4. Влияние зубьев на деформацию ободьев центральных колес 123

Глава 5. **Деформация обода сателлита** 133
§ 1. Метод элементарной нагрузки 134
§ 2. Симметричная деформация обода сателлита 138
§ 3. Дополнительная деформация зубьев, обусловленная податливостью обода сателлита 141

Глава 6. **Деформация ободьев шлицевых муфт** 144
§ 1. Расчетная модель шлицевых муфт 144
§ 2. Периодическая деформация шлицевых муфт 148
§ 3. Осесимметричная деформация шлицевых муфт 155
§ 4. Экспериментальные исследования деформации ободьев шлицевых муфт 159

III. Деформативность сателлитного узла 165

Глава 7. **Деформация оси сателлита** 165
§ 1. Деформация изгиба и сдвига оси сателлита 166
§ 2. Деформация овализации оси сателлита 171
§ 3. Контактная деформация оси сателлита 174
§ 4. Экспериментальные исследования деформации оси сателлита 178

Глава 8. **Деформация водила** 185
§ 1. Методы определения деформации водила 185
§ 2. Деформация щек водила 191
§ 3. Экспериментальные исследования деформации водила 197

Заключение 20[illegible]

Литература [illegible]

Эдуард Леонович Айрапетов, Михаил Дмитриевич Генкин
Деформативность планетарных механизмов

Утверждено к печати
Государственным научно-исследовательским институтом машиноведения

Редактор издательства **Л. М. Бекасова**
Технический редактор **Н. П. Кузнецова**

Сдано в набор 29/XII—1972 г. Подписано к печати 24/IV 1973 г. Формат 60×90¹/₁₆
Бумага № 2. Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 12,9. Тираж 2000 экз.
Т-05376. Тип. зак. 1620. Цена 86 коп.

Издательство «Наука». Москва, 103717 ГСП, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099 Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
76	8 сн.	(1.211)	(1.11)
23	§ 4	классов	колес
92	ф-ла (2.18)	$2\pi\tau r^2$	$2\pi\tau r$
8	25 сн.	Захаров	Захарова

Л. Айрапетов, М. Д. Генкин

gk-7

xp-4

86 коп.

800008

Л4
10326